PSI
MATHEMATIQUES ALGEBRE

Feuille d'Exercices
Révisions d'algèbre linéaire
5 Septembre 2023

1 Exercices fondamentaux à savoir faire

Exercice 1. Soit $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x + y + 2z = 0, t + y = 0\}$.

1. Montrer que F est un sev de $\mathbb{R}^4$, en donner une base, la dimension et un supplémentaire G dans $\mathbb{R}^4$.
2. Donner la matrice dans la base canonique du projecteur sur F parallèlement à G (resp : symétrie par rapport à F parallèlement à G).
3. Pour $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, donner $p(x, y, z, t)$.

Exercice 2. Soit $C = \{(x, x, y)/(x, y) \in \mathbb{R}^2\}$. Montrer que C est un sev d'un espace E à définir, en donner une base, la dimension et un supplémentaire dans E.

Exercice 3. On pose $D = \{\begin{pmatrix} a & b \\ b & b \end{pmatrix} / (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$ et $F = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})/a + b + c + d = 0\}$.

1. Montrer que D et F sont des sev de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
2. A-t-on $D \oplus F = \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$?

Exercice 4. Soit $G = \{P \in \mathbb{R}_n[X]/P(1) = 0\}$.Montrer que G est un sev de $\mathbb{R}_n[X]$, en donner une base, la dimension et un supplémentaire dans $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 5. Soit $L = \{(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 3u_{n+1} + 2u_n\}$. Montrer que L est un sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, en donner une base et sa dimension.

Exercice 6. Dans chacun des cas suivants , montrer que l'application est linéaire, donner la matrice de l'application linéaire dans les bases canoniques des espaces concernés, leur noyau et image :

1. $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x + y + z, x - y + z, x + 3y + z) \end{array} \right.$.
2. $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \longmapsto & x + y + z \end{array} \right.$.
3. $h : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \longmapsto & (x, y, x + y) \end{array} \right.$.
4. $k : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \longmapsto & X^2P'' - XP' + P \end{array} \right.$.
5. (début d'un exo oral St Cyr 2019) On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et l'application $L : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & AM - MA \end{array} \right.$.

Exercice 7. Montrer que l'application f définie par $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x, y + z, 0) \end{array} \right.$ est une projection et en donner ses éléments caractéristiques.

Exercice 8. Soit $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ où $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $\mathscr{S}_n$ l'ensemble des matrices de E symétriques et $\mathscr{A}_n$ l'ensemble des matrices de E antisymétriques.

1. Montrer que $\mathscr{S}_n$ et $\mathscr{A}_n$ sont supplémentaires dans E. Si p désigne le projecteur de E sur $\mathscr{S}_n$ parallèlement à $\mathscr{A}_n$, déterminer $p(M)$ pour $M \in E$.
2. Déterminer les dimensions respectives de $\mathscr{S}_n$ et $\mathscr{A}_n$.

Exercice 9. Soit B la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On considère f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 12 & 6 & 0 \\ -20 & -10 & 0 \\ -6 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

1. (a) Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, déterminer $f(u)$.
   (b) Donner le rang de f et une base de $\operatorname{Im} f$.
   (c) Déterminer une base de $\operatorname{Ker} f$.
   (d) La matrice A est-elle inversible ?
   (e) Quel est le noyau de A ?
2. On considère la famille $C = (t, v, w)$ avec $t = (1, -2, 0), v = (-3, 5, 1)$ et $w = (0, 0, 1)$.
   (a) Montrer que C est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Déterminer les matrices de passage P_{BC} et P_{CB}. On notera $P = P_{BC}$.
   (c) Donner la matrice D de f dans la base C sans utiliser A.
   (d) Donner un lien matriciel entre A, D et P.
   (e) Donner A^n en fonction de D^n.
   (f) En déduire $f^n(u)$ pour $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Exercice 10. Soient f_1 et f_2 les fonctions définies par : $\forall x \in \mathbb{R}, f_1(x) = e^x \cos(x)$ et $f_2(x) = e^x \sin(x)$. On pose $E = \operatorname{Vect}(f_1, f_2)$ et pour $f \in E$, on pose $D(f) = f'$.

1. Justifier que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2. Donner une base B de E.
2. Démontrer que D est un endomorphisme de E.
3. Donner la matrice de D dans la base B.

Exercice 11. On considère l'application u définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par $u(P) = XP' + P$. Justifier que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et calculer son déterminant. Quel est le noyau, l'image, le rang de u ?

Exercice 12. Soit $(a, b, c) \in K^3$. A quelle condition les vecteurs $\begin{pmatrix} a \\ c \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ a \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix}$ forment-ils une base de $\mathbb{K}^3$?

Exercice 13. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ canoniquement associé à $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a & b \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 & 3 \\ b & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Déterminer les valeurs de a et b pour que f soit un automorphisme.

2 Des exercices un peu plus théoriques

Exercice 14. Montrer que le rang d'une application linéaire est invariant par composition par un isomorphisme (c'est-à-dire $\mathrm{rg}\,(f\circ g)=\mathrm{rg}\,(h\circ f)=\mathrm{rg}\,(f)$ lorsque $f\in\mathscr{L}(E,F), h\in GL(F), g\in GL(E)$)

Exercice 15. (Mines-Télécom PSI 2022)
Soit $A=(a_{ij})\in GL_n(\mathbb{K})$. On pose $A^{-1}=(b_{ij})_{ij}$. Soit J la matrice dont tous les coefficients valent 1.

1. Donner les coefficients de $M=JA^{-1}$. Quel est son rang ?
2. Montrer que $\det(J-A)=\left(1-\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} b_{ij}\right)\det(A)$.

Exercice 16. (CCINP PSI 2023)
Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et $f\in\mathscr{L}(E)$ tel que la matrice A dans une base soit indépendante de cette base.

1. Montrer que : $\forall P\in GL_n(\mathbb{K}), AP=PA$.
2. Soit $B\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
   (a) Montrer qu'il existe $\lambda\in\mathbb{K}$ tel que $(B-\lambda I_n)\in GL_n(\mathbb{K})$. *utiliser que* $\det(B-\lambda I_n)\in\mathbb{K}_n[X]$.
   (b) En déduire que $AB=BA$.
3. Montrer que f est une homothétie.

Exercice 17. Montrer que l'application $T:f\longmapsto T(f)$ définie par

$$\forall x\in\mathbb{R}, T(f)(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

est une application linéaire de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, injective et non surjective.

Exercice 18. Notons $E=\mathbb{R}[X]$ et $P=X^2+3X+1$.

1. Justifier que F l'ensemble des multiples de P est un sev de E.
2. On considère $f:E\to E$ qui à tout polynôme A associe son reste dans la division euclidienne par P.
   (a) Rappeler le théorème de la division euclidienne dans E.
   (b) Montrer que f est un endomorphisme de E.
   (c) Déterminer Image et Noyau de f.

Exercice 19. Soit $A\in\mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ tel que $a_{ij}=\binom{j-1}{i-1}$ si $i\leq j$ et 0 sinon.

1. Montrer que A est la matrice de $P\longmapsto P(X+1)$.
2. Montrer que A est inversible et calculer son inverse.

Exercice 20. Soit φ un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.
Démontrer

$$\ker\varphi=\ker\varphi^2\iff\ker\varphi\cap\mathrm{Im}\varphi=\{0\}$$

$$\mathrm{Im}\varphi=\mathrm{Im}\varphi^2\iff\ker\varphi+\mathrm{Im}\varphi=E$$

Exercice 21. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $D_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & n+1 \end{vmatrix}$.

1. Montrer que $D_{n+1} = n! + (n+1)D_n$.
2. En déduire une expression de D_n en fonction de $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ (on pourra étudier $\frac{D_n}{n!}$)

Exercice 22. Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ telles que $AB = BA$ montrer que $\det(A^2 + B^2) \geq 0$.

Exercice 23. Soient $A \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ antisymétrique et $J \in \mathcal{M}_{2n}$ matrice dont tous les coeffs sont égaux à 1. Etablir que $\forall x \in \mathbb{R},\ \det(A + xJ) = \det A$.