PSI
MATHEMATIQUES

Feuille d'Exercices
Révisions d'algèbre linéaire
Septembre 2022

Exercice 1.

1. Donner 3 espaces vectoriels de votre cours de Sup qui ne sont pas de dimension finie.
2. Donner 3 espaces vectoriels de votre cours de Sup de dimension finie. Donner la base canonique et la dimension de chacun.
3. Comment montrer que l'ensemble des suites convergentes est un espace vectoriel ?
4. Même question que l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$.

Exercice 2.

1. On considère l'application f telle que $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = x + y + z$. Montrer que f est une forme linéaire de $\mathbb{R}^3$.
2. Soit $\Pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 0\}$ et $D = vect((0, 1, 2))$.
   (a) Justifier que D est un sev de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Donner trois méthodes pour montrer que Π est un sev de $\mathbb{R}^3$ dont une donnant une base de Π et sa dimension.
   (c) Justifier que $((1, -1, 0), (0, 1, -1))$ est une base de Π.
   (d) Donner trois méthodes pour montrer que Π et D sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ du projecteur p sur Π parallèlement à D. Donner son noyau et son image.

Exercice 3. Montrer que l'application $T : f \longmapsto T(f)$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, T(f)(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

est une application linéaire de $\mathscr{C}^0(\mathbb{R})$ dans $\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$, injective et non surjective.

Exercice 4. Dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R}), F$(resp : G) est formé des matrices $\begin{pmatrix} a & 2a+b \\ -b & -a \end{pmatrix}$ (resp : des matrices $\begin{pmatrix} a & 3a+b \\ -b & -2a+b \end{pmatrix}$), où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

1. Montrer que F et G sont des sev et en donner une base.
2. Montrer que $\mathscr{M}_2(\mathbb{R}) = F \oplus G$.

Exercice 5. On désigne par $\mathbb{R}_3[X]$ l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à 3.

Soit φ l'application définie par : $\forall P \in \mathbb{R}_3[X], \varphi(P) = R$ où R est le reste de la division euclidienne de $(X^4 - 1)P$ par $X^4 + X^2$.

1. Vérifier que $\varphi \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_3[X])$.

2. Montrer que f est un projecteur.
3. Déterminer la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.
4. En déduire kerφ et Imφ.

Exercice 6. Soit $E = \{f_{a,b} : x \longmapsto (ax+b)e^{2x}, (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$.

1. Montrer que $\varphi : f \longmapsto f'$ est un endomorphisme de E. Donner sa matrice dans la base $(x \longmapsto x\,e^{2x}, x \longmapsto e^{2x})$.
2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. En déduire une solution de l'équation différentielle :

$$y^{(3)} - y'' - 2y' - 3y = (-\lambda x + 4)e^{2x}$$

Exercice 7. (Mines PSI 2021) Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Déterminer une base de $F = \text{Vect}\left((M^n)_{n\in\mathbb{N}}\right)$.
3. Montrer que le commutant de M est exactement F.

Exercice 8. (CCINP PSI 2021)

1. Soit $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^{2n})$ tel que $u^2 = 0$ et rg(u)=n.
   (a) Montrer que $\text{Ker}\,(u) = \text{Im}\,(u)$.
   (b) En déduire qu'il existe une base de $\mathbb{R}^{2n}$ dans laquelle la matrice de u est $\begin{pmatrix} 0 & I_n \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
2. Soit $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^{3n})$ tel que $u^3 = 0$ et rg(u)=$2n$.
   (a) Montrer que $\text{Ker}\,(u) = \text{Im}\,(u^2)$.
   (b) En déduire qu'il existe une base de $\mathbb{R}^{3n}$ dans laquelle la matrice de u est $\begin{pmatrix} 0 & I_n & 0 \\ 0 & 0 & I_n \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 9. Soit $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace des matrices carrées d'ordre n, $\mathscr{S}$ le sous espace des matrices symétriques et $\mathscr{A}$ celui des matrices antisymétriques.

1. Donner la dimension des espaces $\mathscr{S}$ et $\mathscr{A}$.
2. Montrer que $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = \mathscr{S} \oplus \mathscr{A}$. *On proposera deux méthodes*
3. On considère l'endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\varphi : M \longmapsto {}^t M$.
   (a) Donner sa matrice dans une base adaptée à la décomposition précédente.
   (b) Donner le rang, le déterminant de φ.

Exercice 10. Soient $E = \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. On note U l'application de E dans E définie pour tout $M \in E$ par $U(M) = P\,M$. Montrer que U est un endomorphisme de E.
2. Expliciter la matrice de U dans la base canonique de E.
3. Déterminer $\ker(U)$, $\text{Im}(U)$.

Exercice 11. Soit φ un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

Démontrer

$$\ker\varphi = \ker\varphi^2 \iff \ker\varphi \cap \mathrm{Im}\varphi = \{0\}$$

$$\mathrm{Im}\varphi = \mathrm{Im}\varphi^2 \iff \ker\varphi + \mathrm{Im}\varphi = E$$

Exercice 12. Soient $(m, a, b) \in \mathbb{R}^3$. On considère l'application f qui, à tout quadruplet de réels (x, y, z, t) associe $(mx + my + mz + t, x + my + z + mt)$.

1. Quels sont les espaces de départ et d'arrivée de f ?
2. Montrer que f est linéaire.
3. On munit $\mathbb{R}^4$ et $\mathbb{R}^2$ de leurs bases canoniques . Donner la matrice de f dans ces bases.
4. Donner le rang de f et en déduire la dimension de son noyau.
5. Étudier la surjectinité et injectivité de f.
6. (IMT PSI 2021) Résoudre le système

$$\begin{cases} mx + my + mz + t &= a \\ x + my + z + mt &= b \end{cases}$$

Exercice 13. Soit M une matrice carrée à n lignes et colonnes à coefficients réels. Pour $(i, j) \in \{1, .., n\}^2$, on note $E_{i,j}$ la matrice de taille n dont tous les coeffs sont nuls sauf le (i, j) ième qui vaut 1.

1. Déterminer les matrices $ME_{i,j}$ et $E_{i,j}M$.
2. Déterminer la dimension de l'espace des matrices M telles que $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), MX = XM$.

Exercice 14. Déterminer x en fonction de a pour que $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & x \end{pmatrix}$ ne soit pas inversible.

Exercice 15. Calculer le déterminant :

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Exercice 16. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Calculer $\det((|i - j|)_{1 \leq i,j \leq n})$.
2. Calculer $\det((\min(i, j))_{1 \leq i,j \leq n}$.
3. Calculer $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ n-1 & n & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \\ 2 & 3 & \cdots & \cdots & 1 \end{vmatrix}$
4. Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer le déterminant de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $\forall i \in [\![1, n]\!], a_{i,i} = 1 + x^2, \forall i \in [\![1, n-1]\!] a_{i,i+1} = x, \forall i \in [\![2, n]\!], a_{i-1,i} = x$ et tous les autres coefficients sont nuls.

Exercice 17. Soient $n \in \mathbb{N}^*, x_1, x_2, \cdots, x_n, c \in \mathbb{R}$. On considère la matrice $J \in \mathscr{M}_n$ dont tous les coeffs sont égaux à 1 et

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & 1 & \cdots & 1 \\ c & x_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ c & \cdots & c & x_n \end{pmatrix}$$

1. Établir que $x \mapsto \det(A + xJ)$ est une application polynômiale de degré au plus 1.
2. En déduire $\det(A)$. *Indication : séparer les cas* $c \neq 1$ *et* $c = 1$