1 Transformée de Laplace de la fonction sinus cardinal

Pour $x > 0$, on note :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} e^{-tx} dt, \quad G(x) = \int_0^{+\infty} e^{-tx} \sin(t) dt \text{ et } H(x) = \int_0^{+\infty} e^{-tx} \cos(t) dt.$$

Q1. Montrer que : $\forall t \in \mathbb{R}^+,\ |\sin(t)| \leq t$.

Q2. Montrer que les fonctions F, G et H sont bien définies sur $]0, +\infty[$.

Q3. Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 0$.

Q4. Montrer que F est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et exprimer F' à l'aide de la fonction G.

Q5. Trouver une expression simple pour G et pour H. *On pourra calculer* $H(x) + iG(x)$.

En déduire, pour $\alpha \in]0, +\infty[$, la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-tx} \cos(\alpha t) dt$.

Q6. En déduire une expression simple pour F. Que vaut $F(1)$?

CCINP PSI 2020 exo 1 (extrait)

Q1. Soit $t \in \mathbb{R}^+$. La fonction sinus est de classe C^1 sur $[0,t]$ et pour tout $x \in [0,t]$, $|\sin'(t)| = |\cos(t)| \leq 1$. Par l'inégalité des accroissements finis, on a donc $|\sin(t) - \sin(0)| \leq 1 \times |t - 0|$ i.e.

$$\boxed{|\sin(t)| \leq t}$$

Q2. Notons $\theta : t > 0 \mapsto \dfrac{\sin(t)}{t}$. θ est continue sur $]0,+\infty[$ et bornée par 1 d'après la question précédente.
Soit $x > 0$. Alors, pour tout $t > 0$, $\left|\theta(t)e^{-tx}\right| \leq e^{-tx}$. Mais $t \mapsto e^{-tx}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et intégrable en $+\infty$. En effet, par limite usuelle, $t^2 e^{-tx} \to 0$ lorsque $t \to +\infty$ puisque $x > 0$. Ainsi, $e^{-tx} = o_{+\infty}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$. Comme $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est intégrable en $+\infty$ (intégrale de Riemann avec $2 > 1$), on a bien le résultat annoncé.
Finalement, $t \mapsto \theta(t)e^{-tx}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ donc $F(x)$ existe.
Ce raisonnement n'a utilisé que le fait que θ est continue sur $]0,+\infty[$ et bornée donc c'est également valable pour sin et cos ce qui donne bien finalement :

$$\boxed{\text{les fonctions } F, G \text{ et } H \text{ sont bien définies sur }]0,+\infty[}$$

Q3. On peut utiliser le théorème de converge dominée mais on peut aussi faire plus simple : soit $x > 0$. Comme on l'a vu à la question précédente, pour tout $t > 0$, $\left|\theta(t)e^{-tx}\right| \leq e^{-tx}$. Ces fonctions de t sont intégrables sur $]0,+\infty[$ donc

$$|F(x)| \leq \int_0^{+\infty} \left|\theta(t)e^{-tx}\right| dt \leq \int_0^{+\infty} e^{-tx} dt = \left[-\frac{1}{x}e^{-tx}\right]_{t\to 0}^{t\to+\infty} = \frac{1}{x}$$

ce qui donne bien

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0}$$

Q4. Posons $f : (x,t) \in]0,+\infty[\times]0,+\infty[\to \dfrac{\sin(t)}{t}e^{-tx}$.

(a) pour tout $x > 0$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue et intégrable sur $]0,+\infty[$ (vu dans **Q2**),

(b) pour tout $t > 0$, $x \mapsto f(x,t)$ est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$,

(c) pour tout $x > 0$, $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -\sin(t)e^{-tx}$ est continue sur $]0,+\infty[$.

(d) Pour tous $x, t > 0$,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = \left|-\sin(t)e^{-tx}\right| \leq e^{-tx}$$

Soit $a > 0$. Alors pour $t > 0$ et $x \geq a$,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq e^{-tx} \leq e^{-at} = \varphi(t)$$

en posant $\varphi : t > 0 \mapsto e^{-at}$. φ est positive, continue et intégrable (déjà vu) sur $]0,+\infty[$.

Ainsi, par le théorème de classe C^1 des intégrales à paramètre, F est de classe C^1 sur $[a,+\infty[$ et pour tout $x \geq a$,

$$\boxed{F'(x)} = \int_0^{+\infty} (-\sin(t))\, e^{-tx} dt = \boxed{-G(x)}$$

Ceci étant valable pour tout $a > 0$, $\boxed{F \text{ est de classe } C^1 \text{ sur }]0,+\infty[}$ et le résultat précédent est valable pour tout $x > 0$.

Q5. ▸ Soit $x > 0$. Alors

$$\begin{aligned} H(x) + iG(x) &= \int_0^{+\infty} e^{-tx}\cos(t)dt + i\int_0^{+\infty} e^{-tx}\sin(t)dt = \int_0^{+\infty} e^{-tx}\left(\cos(t) + i\sin(t)\right)dt = \int_0^{+\infty} e^{-tx}e^{it}dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{(-x+i)t}dt = \left[\frac{1}{-x+i}e^{(-x+i)t}\right]_{t=0}^{t\to+\infty} = \frac{1}{x-i} = \frac{x+i}{x^2+1} \end{aligned}$$

En effet, si $t > 0$, $\left|\dfrac{1}{-x+i}e^{(-x+i)t}\right| = \dfrac{1}{|-x+i|}\left|e^{-xt}e^{it}\right| = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}e^{-xt} \to 0$ quand $t \to +\infty$ puisque $x > 0$. Il reste enfin à prendre partie réelle et partie imaginaire pour obtenir

$$\boxed{G(x) = \frac{1}{x^2+1} \text{ et } H(x) = \frac{x}{x^2+1}}$$

▸ Soit $\alpha > 0$. Dans $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-tx}\cos(\alpha t)dt$ on pose $u = \alpha t$ (changement de variable C^1 strictement croissant de $]0,+\infty[$ dans $]0,+\infty[$ puisque $\alpha > 0$). On obtient donc

$$\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-tx}\cos(\alpha t)dt} = \int_0^{+\infty} e^{-t\frac{x}{\alpha}}\cos(u)\frac{du}{\alpha} = \frac{1}{\alpha}H\left(\frac{x}{\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha}\frac{x/\alpha}{x^2/\alpha^2+1} = \boxed{\frac{x}{x^2+\alpha^2}}$$

Q6. On a vu que $F' = -G$. L'expression de G donne donc : pour tout $x > 0$, $F'(x) = -\dfrac{1}{x^2+1} = -\arctan'(x)$. Comme $]0, +\infty[$ est un intervalle, il existe une constante réelle c telle que pour tout $x > 0$, $F(x) = c - \arctan(x)$.

Mais on a vu que $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 0$ et on sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} \arctan(x) = \dfrac{\pi}{2}$. En en déduit donc que $c = \dfrac{\pi}{2}$ de sorte que pour tout $x > 0$,

$$\boxed{F(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x)} \text{ donc } \boxed{F(1) = \frac{\pi}{4}}$$

Exercice 2 - Résolution d'une équation fonctionnelle

Dans cet exercice, on souhaite déterminer les fonctions $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ vérifiant les relations :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in]0,+\infty[, \quad f(x+1)+f(x) = \frac{1}{x^2}. \qquad (P)$$

Partie I - Existence et unicité de la solution du problème (P)

Dans cette partie, on démontre que le problème (P) admet une unique solution et on détermine une expression de celle-ci sous la forme d'une série de fonctions.

I.1 - Existence de la solution

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $\varphi_k :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad \varphi_k(x) = \frac{(-1)^k}{(x+k)^2}.$$

1. Montrer que la série de fonctions $\sum_{k\geq 0} \varphi_k$ converge simplement sur $]0,+\infty[$.

Dans tout les reste de cet exercice, on note $\varphi :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ la somme de la série $\sum_{k\geq 0} \varphi_k$.

2. Montrer que pour tout $x \in]0,+\infty[$, on a $\varphi(x+1)+\varphi(x) = \dfrac{1}{x^2}$.
3. En utilisant le théorème spécial des séries alternées, montrer que :

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \varphi_k(x)\right| \leq \frac{1}{(x+n+1)^2}.$$

4. Montrer que la fonction φ est une solution de (P).

I.2 - Unicité de la solution

5. Montrer que si $f :]0,+\infty \to \mathbb{R}$ est une solution de (P), alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad f(x) = (-1)^{n+1} f(x+n+1) + \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(x+k)^2}.$$

6. En déduire que la fonction φ est l'unique solution de (P).

Partie II - Etude de la solution du problème (P)

Dans cette partie, on étudie quelques propriétés de l'unique solution $\varphi :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ du problème (P).

7. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que la série de fonctions $\sum_{k\geq 0} \varphi_k$ converge uniformément sur $[\varepsilon,+\infty[$.
8. Montrer que la fonction φ est continue sur $]0,+\infty[$. En utilisant le fait que φ est une solution du problème (P), en déduire un équivalent simple de φ au voisinage de 0^+.
9. Justifier que la fonction φ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que l'on a :

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad \varphi'(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2(-1)^{k+1}}{(x+k)^3}.$$

10. En déduire que la fonction φ est décroissante sur $]0,+\infty[$.
11. En utilisant le résultat de la question précédente et la relation (P), montrer que :

$$\forall x \in]1,+\infty[, \quad \frac{1}{x^2} \leq 2\varphi(x) \leq \frac{1}{(x-1)^2}.$$

En déduire un équivalent de φ en $+\infty$.

Partie III - Expression intégrale de la solution du problème (P)

Dans cette partie, on déterminer une expression de φ sous la forme d'une intégrale. On considère un élément $x \in]0,+\infty[$.

12. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, montrer que la fonction $t \mapsto t^{x+k-1}\ln(t)$ est intégrable sur $]0,1]$ et que l'on a :

$$\int_0^1 t^{x+k-1}\ln(t)dt = -\frac{1}{(x+k)^2}.$$

13. En déduire que la fonction $t \mapsto \dfrac{t^{x-1}\ln(t)}{1+t}$ est intégrable sur $]0,1]$ et que :

$$\varphi(x) = -\int_0^1 \frac{t^{x-1}\ln(t)}{1+t}dt.$$

Correction- Résolution d'une équation fonctionnelle

I.1 - Existence de la solution

1. Soit $x > 0$.
   Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\varphi_k(x) = \dfrac{(-1)^k}{(x+k)^2} \underset{k\to+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{k^2}\right)$.
   Or $\displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^2}$ converge absolument (Riemann et $2 > 1$), donc, par comparaison, $\displaystyle\sum_{k\geq 0} \varphi_k(x)$ converge absolument, donc converge.
   Ceci étant valable pour tout $x > 0$, la série de fonctions $\displaystyle\sum_{k\geq 0} \varphi_k$ converge simplement sur $]0, +\infty[$.

2. Pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned}
\varphi(x+1) + \varphi(x) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(x+1+k)^2} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(x+k)^2} \\
&= \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{(x+j)^2} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(x+k)^2} \\
&= -\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{(-1)^j}{(x+j)^2} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(x+k)^2} \\
&= \frac{1}{x^2} \quad \text{(télescopage).}
\end{aligned}$$

3. Soit $x > 0$.
   La série $\displaystyle\sum_{k\geq 0} \varphi_k(x)$ est alternée et la suite $(|\varphi_k(x)|)_{k\geq 0} = \left(\dfrac{1}{(x+k)^2}\right)_{k\geq 0}$ est décroissante et tend vers 0, donc, d'après le critère spécial des séries alternées,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \varphi_k(x)\right| \leq |\varphi_{n+1}(x)| = \frac{1}{(x+n+1)^2}.$$

4. • Toujours d'après le critère des séries alternées, on a, pour tout $x > 0$,

$$|\varphi(x)| = \left|\sum_{k=0}^{+\infty} \varphi_k(x)\right| \leq |\varphi_0(x)| = \frac{1}{x^2}.$$

   Or $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0$, donc, d'après le théorème des gendarmes, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = 0$.
   • D'après la question 2, on a aussi, pour tout $x > 0$, $\varphi(x+1) + \varphi(x) = \dfrac{1}{x^2}$.
   • φ est donc bien une solution de (P).

I.2 - Unicité de la solution

5. Soit $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une solution de (P).
   Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(x+k)^2} &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k (f(x+k+1) + f(x+k)) \quad \text{(car } f \text{ est solution de } (P)\text{)} \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k f(x+k+1) + \sum_{k=0}^{n} (-1)^k f(x+k) \quad \text{(on a le droit car ces sommes sont finies)} \\
&= -\sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1} f(x+k+1) + \sum_{k=0}^{n} (-1)^k f(x+k) \\
&= -\sum_{j=1}^{n+1} (-1)^j f(x+j) + \sum_{k=0}^{n} (-1)^k f(x+k) \\
&= -(-1)^{n+1} f(x+n+1) + (-1)^0 f(x+0) \quad \text{(télescopage).}
\end{aligned}$$

   En ré-organisant, on a bien

$$\forall x > 0, \quad f(x) = (-1)^{n+1} f(x+n+1) + \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(x+k)^2}.$$

6. Soit $x > 0$. En faisant tendre n vers $+\infty$ dans la relation précédente, ce qui est possible car

— $\underbrace{(-1)^{n+1}}_{\text{borné}} \underbrace{f(\overbrace{x+n+1}^{\to+\infty})}_{\to 0} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$, car f est solution de (P)

— et $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(x+k)^2}=\varphi(x)$ comme limite de la suite des sommes partielles de la série $\sum\limits_{k\geq 0}\frac{(-1)^k}{(x+k)^2}$, dont la somme vaut $\varphi(x)$,

on obtient

$$f(x)=\lim_{n\to+\infty}f(x)=\lim_{n\to+\infty}(-1)^{n+1}f(x+n+1)+\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(x+k)^2}=0+\varphi(x)=\varphi(x).$$

D'où, si f est solution de (P), alors $f=\varphi$, ce qui assure l'unicité de la solution de (P) (l'existence a été prouvée dans la sous-partie précédente).

Partie II - Etude de la solution du problème (P)

7. Soit $\varepsilon>0$. Pour tout $k\geq 0$, pour tout $x\geq\varepsilon$,

$$|\varphi_k(x)|=\frac{1}{(x+k)^2}\leq\frac{1}{(\varepsilon+k)^2},$$

donc $\|\varphi_k\|_\infty^{[\varepsilon,+\infty[}\leq\frac{1}{(\varepsilon+k)^2}\underset{k\to+\infty}{=}O\left(\frac{1}{k^2}\right)$.

Or $\sum\limits_{k\geq 1}\frac{1}{k^2}$ converge absolument (Riemann et $2>1$), donc, par comparaison, $\sum\limits_{k\geq 0}\frac{1}{(\varepsilon+k)^2}$, puis $\sum\limits_{k\geq 0}\|\varphi_k\|_\infty^{[\varepsilon,+\infty[}$ convergent absolument, donc convergent, donc $\sum\limits_{k\geq 0}\varphi_k$ converge normalement, donc uniformément, sur $[\varepsilon,+\infty[$.

8. • On a :

— pour tout $k\in\mathbb{N}$, $\varphi_k:x\mapsto\frac{1}{(x+k)^2}$ est continue sur $]0,+\infty[$ (comme inverse d'une fonction polynomiale qui ne s'annule pas),

— $\sum\limits_{k\geq 0}\varphi_k$ converge uniformément sur $[\varepsilon,+\infty[$,

donc, d'après le théorème de continuité sous le signe $\sum$, $\varphi=\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\varphi_k$ est continue sur $[\varepsilon,+\infty[$.

Ceci étant valable pour tout $\varepsilon>0$, φ est continue sur $]0,+\infty[$.

• Comme φ est solution de (P), on a, pour tout $x>0$, $\varphi(x)+\varphi(x+1)=\frac{1}{x^2}$, donc

$$\varphi(x)=\underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\to+\infty}-\underbrace{\varphi(x+1)}_{\to\varphi(1)}\underset{x\to 0^+}{\sim}\frac{1}{x^2}.$$

$(\varphi(x+1)\underset{x\to 0^+}{\to}\varphi(1)$ par continuité de φ sur $\mathbb{R}_+^*$, donc en particulier en 1).

9. On a :

— Pour tout $k\in\mathbb{N}$, φ_k est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $x>0$,

$$\varphi_k'(x)=-\frac{2(-1)^k}{(x+k)^3}=\frac{2(-1)^{k+1}}{(x+k)^3}.$$

— $\sum\limits_{k\geq 0}\varphi_k$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ d'après la question 1

— Pour tout $\varepsilon>0$, pour tout $k\geq 0$, pour tout $x\geq\varepsilon$,

$$|\varphi_k'(x)|=\frac{2}{(x+k)^3}\leq\frac{2}{(\varepsilon+k)^3},$$

donc $\|\varphi_k'\|_\infty^{[\varepsilon,+\infty[}\leq\frac{2}{(\varepsilon+k)^3}\underset{k\to+\infty}{=}O\left(\frac{1}{k^3}\right)$.

Or $\sum\limits_{k\geq 1}\frac{1}{k^3}$ converge absolument (Riemann et $3>1$), donc, par comparaison, $\sum\limits_{k\geq 0}\frac{2}{(\varepsilon+k)^3}$, puis $\sum\limits_{k\geq 0}\|\varphi_k'\|_\infty^{[\varepsilon,+\infty[}$ convergent absolument, donc convergent, donc $\sum\limits_{k\geq 0}\varphi_k'$ converge normalement, donc uniformément, sur $[\varepsilon,+\infty[$.

D'où, d'après le théorème de dérivation sous le signe $\sum$, $\varphi=\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\varphi_k$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\varepsilon,+\infty[$.

Ceci étant valable pour tout $\varepsilon>0$, φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et, pour tout $x>0$,

$$\varphi'(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\varphi_k'(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{2(-1)^{k+1}}{(x+k)^3}.$$

10. La série $\sum\limits_{k\geq 0}\varphi_k'(x)=\sum\limits_{k\geq 0}\frac{2(-1)^{k+1}}{(x+k)^3}$ est alternée et la suite $(|\varphi_k(x)|)_{k\geq 0}=\left(\frac{2}{(x+k)^2}\right)_{k\geq 0}$ est décroissante et tend vers 0, donc, d'après le critère spécial des séries alternées, $\varphi'(x)=\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\varphi_k'(x)$ est du signe de son premier terme, donc négative. φ est donc bien décroissante sur $]0,+\infty[$.

11. • Pour tout $x > 1$, $\varphi(x+1) \le \varphi(x) \le \varphi(x-1)$ car φ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et $x-1, x, x+1 \in \mathbb{R}_+^*$.
En ajoutant $\varphi(x)$, on a donc
$$\varphi(x+1) + \varphi(x) \le 2\varphi(x) \le \varphi(x-1) + \varphi(x).$$
Enfin, comme φ est solution de (P) et $(x-1), x \in \mathbb{R}_+^*$, on a bien
$$\frac{1}{x^2} = \varphi(x+1) + \varphi(x) \le 2\varphi(x) \le \varphi(x-1) + \varphi(x) = \frac{1}{(x-1)^2}.$$
En divisant par $1/x^2$, on a alors
$$1 \le \frac{2\varphi(x)}{1/x^2} = \frac{\varphi(x)}{1/(2x^2)} \le \frac{x^2}{(x-1)^2}.$$
Or $\displaystyle\frac{x^2}{(x-1)^2} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x^2}{x^2} \underset{x\to+\infty}{\to} 1$, donc, d'après le théorème des gendarmes, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\varphi(x)}{1/(2x^2)} = 1$, et donc
$$\varphi(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2x^2}.$$

Partie III - Expression intégrale de la solution du problème (P)

Soit $x > 0$.

12. Soit $k \in \mathbb{N}$.
Posons $u(t) = \ln(t)$, $u'(t) = \dfrac{1}{t}$, $v'(t) = t^{x+k-1}$, $v(t) = \dfrac{t^{x+k}}{x+k}$.
— u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1]$
— $\displaystyle\lim_{t\to0^+} u(t)v(t) = \lim_{t\to0^+} \frac{1}{x+k} t^{x+k}\ln(t) = 0$ par croissances comparées (et car $x+k>0$)
— Enfin, $\displaystyle\int_0^1 u'(t)v(t)dt = \int_0^1 \frac{1}{x+k}\frac{1}{t^{1-x-k}}dt$ converge (Riemann et $1-x-k<1$).
D'où, par intégration par parties, $\displaystyle\int_0^1 u(t)v'(t)dt = \int_0^1 t^{x+k-1}\ln(t)dt$ converge et
$$\begin{aligned}\int_0^1 t^{x+k-1}\ln(t)dt &= \left[\frac{1}{x+k}t^{x+k}\ln(t)\right]_0^1 - \frac{1}{x+k}\int_0^1 \frac{1}{t^{1-x-k}}dt = 0 - \frac{1}{x+k}\left[\frac{t^{x+k}}{x+k}\right]_0^1 \\ &= 0 - \frac{1}{(x+k)^2} + 0 \quad (\text{car } x+k \ge x > 0) \\ &= -\frac{1}{(x+k)^2}.\end{aligned}$$
Comme de plus $t \mapsto t^{x+k-1}\ln(t)$ est de signe constant (négatif) sur $]0,1]$, l'intégrabilité de cette fonction sur $]0,1]$ est équivalente à la convergence de $\displaystyle\int_0^1 t^{x+k-1}\ln(t)dt$, et on a donc bien l'intégrabilité souhaitée.

13. Utilisons le théorème d'intégration terme à terme.
— Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f_k : t \mapsto (-1)^k t^{x+k-1}\ln(t)$ est intégrable sur $]0,1[$ (d'après la question précédente).
— Pour tout $t \in]0,1[$, $\displaystyle\sum_{k\ge0} f_k(t)$ converge (série géométrique de raison $-t \in]-1,1[$) et
$$\sum_{k=0}^{+\infty} f_k(t) = t^{x-1}\ln(t)\frac{1}{1+t}.$$
La série de fonctions $\displaystyle\sum_{k\ge0} f_k$ converge donc simplement sur $]0,1[$ vers $f : t \mapsto \dfrac{t^{x-1}\ln(t)}{1+t}$, qui est continue (par morceaux) sur $]0,1[$.
— Enfin, pour tout $k \ge 0$,
$$\int_0^1 |f_k(t)|dt = \int_0^1 -t^{x+k-1}\ln(t)dt = \frac{1}{(x+k)^2} \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{1}{k^2}.$$
Or $\displaystyle\sum_{k\ge1} \frac{1}{k^2}$ converge absolument (Riemann et $2>1$), donc, par comparaison, $\displaystyle\sum_{k\ge0}\int_0^1 |f_k(t)|dt$ converge absolument, donc converge.

D'où, d'après le théorème d'intégration terme à terme, $f : t \mapsto \dfrac{t^{x-1}\ln(t)}{1+t}$ est intégrable sur $]0,1[$ et
$$\int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(t)dt = \sum_{k=0}^{+\infty}\int_0^1 f_k(t)dt = \sum_{k=0}^{+\infty} -(-1)^k\frac{1}{(x+k)^2} = -\varphi(x),$$
donc on a bien
$$\varphi(x) = -\int_0^1 \frac{t^{x-1}\ln(t)}{1+t}dt.$$