# EXERCICE 10 analyse

## Énoncé exercice 10

On pose $f_n(x) = \left(x^2+1\right)\dfrac{ne^x + xe^{-x}}{n+x}$.

1. Démontrer que la suite de fonctions $(f_n)$ converge uniformément sur $[0,1]$.
2. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_0^1 \left(x^2+1\right)\frac{ne^x+xe^{-x}}{n+x}\mathrm{d}x$.

## Corrigé exercice 10

1. Pour $x \in [0,1]$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = (x^2+1)\mathrm{e}^x$.
   La suite de fonctions $(f_n)$ converge simplement vers $f : x \mapsto (x^2+1)\mathrm{e}^x$ sur $[0,1]$.
   On a $\forall\, x \in [0,1]$, $f_n(x) - f(x) = (x^2+1)\dfrac{x(\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^x)}{n+x}$, et donc : $\forall x \in [0,1]$, $|f_n(x) - f(x)| \leqslant \dfrac{2\mathrm{e}}{n}$.
   Ce majorant indépendant de $x$ tend vers 0 quand $n \to +\infty$, donc la suite de fonctions $(f_n)$ converge uniformément vers $f$ sur $[0,1]$.
2. Par convergence uniforme sur le segment $[0,1]$ de cette suite de fonctions continues sur $[0,1]$, on peut intervertir limite et intégrale.
   On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_0^1 (x^2+1)\frac{n\mathrm{e}^x+x\mathrm{e}^{-x}}{n+x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (x^2+1)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.
   Puis, en effectuant deux intégrations par parties, on trouve $\displaystyle\int_0^1 (x^2+1)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = 2\mathrm{e} - 3$.

## Énoncé exercice 3

1. On pose $g(x) = \mathrm{e}^{2x}$ et $h(x) = \dfrac{1}{1+x}$.
   Calculer, pour tout entier naturel $k$, la dérivée d'ordre $k$ des fonctions $g$ et $h$ sur leurs ensembles de définitions respectifs.
2. On pose $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{1+x}$.
   En utilisant la formule de Leibniz concernant la dérivée $n^{\text{ième}}$ d'un produit de fonctions, déterminer, pour tout entier naturel $n$ et pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$, la valeur de $f^{(n)}(x)$.

## Corrigé exercice 3

1. $g$ est de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et $h$ est de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.
   On prouve, par récurrence, que :
   $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $g^{(k)}(x) = 2^k\mathrm{e}^{2x}$ et $\forall\, x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$, $h^{(k)}(x) = \dfrac{(-1)^k k!}{(1+x)^{k+1}}$.
2. $g$ et $h$ sont de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ donc, d'après la formule de Leibniz, $f$ est de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ et $\forall\, x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$ :
   $f^{(n)}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} g^{(n-k)}(x)h^{(k)}(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} 2^{n-k}\mathrm{e}^{2x}\frac{(-1)^k k!}{(1+x)^{k+1}} = n!\mathrm{e}^{2x}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k 2^{n-k}}{(n-k)!(1+x)^{k+1}}$.

# EXERCICE 5 analyse

## Énoncé exercice 5

1. On considère la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n\,(\ln n)^\alpha}$ où $n \geqslant 2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

   (a) **Cas $\alpha \leqslant 0$**

   En utilisant une minoration très simple de $u_n$, démontrer que la série diverge.

   (b) **Cas $\alpha > 0$**

   Étudier la nature de la série.
   **Indication** : on pourra utiliser la fonction $f$ définie par $f(x) = \dfrac{1}{x(\ln x)^\alpha}$.

2. Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{\left(\mathrm{e} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}}{\left(\ln(n^2+n)\right)^2}$.

## Corrigé exercice 5

1. (a) Cas $\alpha \leqslant 0$
   $\forall\, n \geqslant 2$, $\ln n \geqslant \ln 2$ donc $(\ln n)^\alpha \leqslant (\ln 2)^\alpha$.
   On en déduit que : $\forall\, n \geqslant 2$, $u_n \geqslant \dfrac{1}{(\ln 2)^\alpha}\dfrac{1}{n}$.
   Or $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{n}$ diverge.
   Donc , par critère de minoration pour les séries à termes positifs, on en déduit que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} u_n$ diverge.

   (b) Cas $\alpha > 0$
   La fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x(\ln x)^\alpha}$ est continue par morceaux, décroissante et positive sur $[2, +\infty[$ donc :
   $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} f(n)$ et $\displaystyle\int_2^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ sont de même nature.
   Puisque $\displaystyle\int_2^X f(x)\,\mathrm{d}x \underset{t=\ln x}{=} \int_{\ln 2}^{\ln(X)} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$, on peut affirmer que : $\displaystyle\int_2^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge $\Longleftrightarrow \alpha > 1$.
   On en déduit que : $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} f(n)$ converge $\Longleftrightarrow \alpha > 1$.

2. On pose, pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, $u_n = \dfrac{\left(\mathrm{e} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}}{\left(\ln(n^2+n)\right)^2}$.
   Au voisinage de $+\infty$, $\mathrm{e} - \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e} - \mathrm{e}^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \mathrm{e} - \mathrm{e}^{n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} = \mathrm{e} - \mathrm{e}^{1-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)} = \dfrac{\mathrm{e}}{2n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.
   On en déduit qu'au voisinage de $+\infty$, $\mathrm{e} - \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\mathrm{e}}{2n}$.
   De plus, au voisinage de $+\infty$, $\ln\left(n^2+n\right) = 2\ln n + \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = 2\ln n + \dfrac{1}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.
   Donc $\ln\left(n^2+n\right) \underset{+\infty}{\sim} 2\ln n$.
   Et comme $\mathrm{e}^{\frac{1}{n}} \underset{+\infty}{\sim} 1$, on en déduit que $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\mathrm{e}}{8} \times \dfrac{1}{n\,(\ln n)^2}$.
   Or, d'après 1.(b), $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{n\,(\ln n)^2}$ converge.
   Donc, par critère d'équivalence pour les séries à termes positifs, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} u_n$ converge.

# EXERCICE 16 analyse

## Énoncé exercice 16

On considère la série de fonctions de terme général $u_n$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [0,1],\quad u_n(x) = \ln\left(1+\frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}\ .$$

On pose, lorsque la série converge, $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\ \ln\left(1+\frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}\right]$.

1. Démontrer que $S$ est dérivable sur $[0,1]$.
2. Calculer $S'(1)$.

## Corrigé exercice 16

1. Soit $x \in [0,1]$.
   Si $x = 0$, $u_n(0) = 0$ et donc $\sum u_n(0)$ converge.
   Si $x \neq 0$, comme au voisinage de $+\infty$, $u_n(x) = -\dfrac{x^2}{2n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, alors $|u_n(x)| \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{x^2}{2n^2}$.
   Or $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}$ converge donc, par critère de comparaison des séries à termes positifs, $\sum u_n(x)$ converge absolument, donc converge.
   On en déduit que la série des fonctions $u_n$ converge simplement sur $[0,1]$.

   La fonction $S$ est donc définie sur $[0,1]$.
   $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $u_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ et $\forall\, x \in [0,1]$, $u_n'(x) = \dfrac{1}{x+n} - \dfrac{1}{n} = \dfrac{-x}{n(x+n)}$.

   Donc $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\forall\, x \in [0,1]$, $|u_n'(x)| \leqslant \dfrac{1}{n^2}$.
   On en déduit que $\|u_n'\|_\infty = \displaystyle\sup_{x\in[0,1]} |u_n'(x)| \leqslant \frac{1}{n^2}$.
   Or $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}$ converge.
   Donc $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n'$ converge normalement, donc uniformément sur $[0,1]$.
   On peut alors affirmer que la fonction $S$ est de classe $\mathcal{C}^1$. Elle est donc dérivable sur $[0,1]$.

   Et on a : $\forall\, x \in [0;1]$, $S'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n'(x)$.

2. En vertu de ce qui précède, $S'(1) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n'(1) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right)$.
   Or $\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{N+1} - 1 \xrightarrow[N\to+\infty]{} -1$.
   Donc $S'(1) = -1$.

# EXERCICE 32 analyse

## Énoncé exercice 32

Soit l'équation différentielle : $x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0$.

1. Trouver les solutions de cette équation différentielle développables en série entière sur un intervalle $]-r, r[$ de $\mathbb{R}$, avec $r > 0$.
   Déterminer la somme des séries entières obtenues.

## Corrigé exercice 32

1. Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et de somme $S$.
   Pour tout $x \in ]-R, R[$, $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, $S'(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$ et $S''(x) = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (n+1) n a_{n+1} x^{n-1}$.
   Donc $x(x-1)S''(x) + 3xS'(x) + S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left((n+1)^2 a_n - n(n+1)a_{n+1}\right) x^n$.

   Par unicité des coefficients d'un développement en série entière, la fonction $S$ est solution sur $]-R, R[$ de l'équation étudiée si, et seulement si, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $(n+1)^2 a_n - n(n+1)a_{n+1} = 0$.
   C'est-à-dire : $\forall n \in \mathbb{N}$, $n a_{n+1} = (n+1) a_n$.
   Ce qui revient à : $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = n a_1$.
   Le rayon de convergence de la série entière $\sum n x^n$ étant égal à 1, on peut affirmer que les fonctions développables en série entière solutions de l'équation sont les fonctions :
   $x \mapsto a_1 \sum\limits_{n=0}^{+\infty} n x^n = a_1 x \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{1}{1-x}\right) = \dfrac{a_1 x}{(1-x)^2}$ définies sur $]-1, 1[$, avec $a_1 \in \mathbb{R}$.

# EXERCICE 60 algèbre

## Énoncé exercice 60

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et $f$ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par : $f(M) = AM$.

1. Déterminer une base de $\mathrm{Ker} f$.
2. $f$ est-il surjectif ?
3. Déterminer une base de $\mathrm{Im} f$.
4. A-t-on $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \mathrm{Ker} f \oplus \mathrm{Im} f$ ?

## Corrigé exercice 60

1. Posons $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   On a $f(M) = \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 2a+4c & 2b+4d \end{pmatrix}$.
   Alors $M \in \mathrm{Ker} f \iff \exists (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ tel que $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $\begin{cases} a & = & -2c \\ b & = & -2d \end{cases}$.
   C'est-à-dire, $M \in \mathrm{Ker} f \iff \exists (c,d) \in \mathbb{R}^2$ tel que $M = \begin{pmatrix} -2c & -2d \\ c & d \end{pmatrix}$.
   On en déduit que $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$. (*)
   On pose $M_1 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   D'après (*), la famille $(M_1, M_2)$ est génératrice de $\mathrm{Ker} f$.
   De plus, $M_1$ et $M_2$ sont non colinéaires ; donc $(M_1, M_2)$ est libre.
   Donc $(M_1, M_2)$ est une base de $\mathrm{Ker} f$.

2. $\mathrm{Ker} f \neq \{0\}$, donc $f$ est non injectif.
   Or $f$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est de dimension finie.
   On en déduit que $f$ est non surjectif.
3. Par la formule du rang, $\mathrm{rg} f = 2$.
   On pose $M_3 = f(E_{1,1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ et $M_4 = f(E_{2,2}) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.
   $M_3$ et $M_4$ sont non colinéaires, donc $(M_3, M_4)$ est une famille libre de $\mathrm{Im} f$.
   Comme $\mathrm{rg} f = 2$, $(M_3, M_4)$ est une base de $\mathrm{Im} f$.
4. On a $\dim \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \dim \mathrm{Ker} f + \dim \mathrm{Im} f$. (1)
   Prouvons que $\mathrm{Ker} f \cap \mathrm{Im} f = \{0\}$.

   Soit $M \in \mathrm{Ker} f \cap \mathrm{Im} f$.
   D'après 1. et 3., $\exists (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ tel que $M = aM_1 + bM_2$ et $M = cM_3 + dM_4$.
   On a donc $\begin{cases} -2a & = & c \\ -2b & = & 2d \\ a & = & 2c \\ b & = & 4d \end{cases}$.
   On en déduit que $a = b = c = d = 0$.
   Donc $M = 0$.
   Donc $\mathrm{Ker} f \cap \mathrm{Im} f = \{0\}$ (2)
   Donc, d'après (1) et (2), $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \mathrm{Ker} f \oplus \mathrm{Im} f$.

# EXERCICE 63 algèbre

## Énoncé exercice 63

Soit un entier $n \geqslant 1$. On considère la matrice carrée d'ordre $n$ à coefficients réels :

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Pour $n \geqslant 1$, on désigne par $D_n$ le déterminant de $A_n$.

1. Démontrer que $D_{n+2} = 2D_{n+1} - D_n$.
2. Déterminer $D_n$ en fonction de $n$.
3. Justifier que la matrice $A_n$ est diagonalisable. Le réel 0 est-il valeur propre de $A_n$ ?

## Corrigé exercice 63

1. C'est un déterminant tri-diagonal, il suffit de développer selon la première ligne.

$$D_{n+2} = 2D_{n+1} + \begin{vmatrix} -1 & -1 & & & (0) \\ 0 & 2 & -1 & & \\ & -1 & 2 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -1 \\ & (0) & & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

   Puis, en développant le second déterminant obtenu selon la première colonne, on obtient $D_{n+2} = 2D_{n+1} - D_n$.

2. $(D_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique $r^2 - 2r + 1 = 0$.
   Donc, son terme général est de la forme $D_n = (\lambda n + \mu) \times 1^n$.
   Puisque $D_1 = 2$ et $D_2 = 3$, on obtient $D_n = n + 1$.

3. La matrice $A_n$ est symétrique réelle donc diagonalisable.
   $D_n = n + 1 \neq 0$ donc $A_n$ est inversible.
   Donc l'endomorphisme canoniquement associé à $A_n$ est injectif.
   On en déduit que 0 n'est pas valeur propre de $A_n$.

# EXERCICE 69 algèbre

## Énoncé exercice 69

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ a & 0 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}$ où $a$ est un réel.

1. Déterminer le rang de $A$.
2. Pour quelles valeurs de $a$, la matrice $A$ est-elle diagonalisable ?

## Corrigé exercice 69

1. Après calcul, on trouve $\det A = a(a+1)$.
   **Premier cas** : $a \neq 0$ et $a \neq -1$
   Alors, $\det A \neq 0$ donc $A$ est inversible.
   Donc $\mathrm{rg} A = 3$.
   **Deuxième cas** : $a = 0$
   $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ donc $\mathrm{rg} A = 2$.

   **Troisième cas** : $a = -1$
   $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ donc $\mathrm{rg} A \geqslant 2$ car les deux premières colonnes de $A$ sont non colinéaires.
   Or $\det A = 0$ donc $\mathrm{rg} A \leqslant 2$.
   On en déduit que $\mathrm{rg} A = 2$.
2. Notons $\chi_A$ le polynôme caractéristique de $A$.
   $\det(\lambda I_n - A) = \begin{vmatrix} \lambda & -a & -1 \\ -a & \lambda & -1 \\ -a & -1 & \lambda \end{vmatrix}$
   Alors, en ajoutant à la première colonne la somme des deux autres puis, en soustrayant la première ligne aux deux autres lignes, on trouve successivement :
   $\det(\lambda I_n - A) = (\lambda - a - 1) \begin{vmatrix} 1 & -a & -1 \\ 1 & \lambda & -1 \\ 1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - a - 1) \begin{vmatrix} 1 & -a & -1 \\ 0 & \lambda + a & 0 \\ 0 & -1 + a & \lambda + 1 \end{vmatrix}$.
   Donc, en développant par rapport à la première colonne,
   $\det(\lambda I_n - A) = (\lambda - a - 1)(\lambda + a)(\lambda + 1)$.
   Donc $\chi_A = (X - a - 1)(X + a)(X + 1)$.
   Les racines de $\chi_A$ sont $a + 1$, $-a$ et $-1$.
   $a + 1 = -a \Longleftrightarrow a = -\dfrac{1}{2}$.
   $a + 1 = -1 \Longleftrightarrow a = -2$.
   $-a = -1 \Longleftrightarrow a = 1$.
   Ce qui amène aux quatre cas suivants :

   **Premier cas** : $a \neq 1$, $a \neq -2$ et $a \neq -\dfrac{1}{2}$
   Alors $A$ admet trois valeurs propres disctinctes.
   Donc $A$ est diagonalisable.
   **Deuxième cas** : $a = 1$
   $\chi_A = (X - 2)(X + 1)^2$.
   Alors $A$ est diagonalisable si et seulement si $\dim E_{-1} = 2$, c'est-à-dire $\mathrm{rg}(A + \mathrm{I}_3) = 1$.
   Or $A + \mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ donc $\mathrm{rg}(A + \mathrm{I}_3) = 1$.
   Donc $A$ est diagonalisable.

**Troisième cas** : $a=-2$
Alors, $\chi_A=(X+1)^2(X-2)$.
$A+\mathrm{I}_3=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ -2 & 1 & 1\\ -2 & 1 & 1\end{pmatrix}$
Les deux premières colonnes de $A+\mathrm{I}_3$ ne sont pas colinéaires, donc $\mathrm{rg}(\mathrm{A}+\mathrm{I}_3)\geqslant 2$.
De plus, $-1$ est valeur propre de $A$, donc $\mathrm{rg}(\mathrm{A}+\mathrm{I}_3)\leqslant 2$.
Ainsi, $\mathrm{rg}(A+\mathrm{I}_3)=2$ et $\dim E_{-1}=1$.
Or l'ordre multiplicité de la valeur propre $-1$ dans le polynôme caractéristique est 2.
On en déduit que $A$ n'est pas diagonalisable.
**Quatrième cas** : $a=-\dfrac{1}{2}$
$\chi_A=(X-\dfrac{1}{2})^2(X+1)$.
$A-\dfrac{1}{2}\mathrm{I}_3=\begin{pmatrix}-\dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} & 1\\ -\dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} & 1\\ -\dfrac{1}{2} & 1 & -\dfrac{1}{2}\end{pmatrix}$.
Les deux premières colonnes de $A-\dfrac{1}{2}\mathrm{I}_3$ sont non colinéaires, donc $\mathrm{rg}(A-\dfrac{1}{2}\mathrm{I}_3)\geqslant 2$.
De plus, $\dfrac{1}{2}$ est valeur propre donc $\mathrm{rg}(A-\dfrac{1}{2}\mathrm{I}_3)\leqslant 2$.
Ainsi, $\mathrm{rg}(A-\dfrac{1}{2}\mathrm{I}_3)=2$ et $\dim E_{\frac{1}{2}}=1$.
Or l'ordre de multiplicité de la valeur propre $\dfrac{1}{2}$ dans le polynôme caractéristique est 2.

On en déduit que $A$ est non diagonalisable.

# EXERCICE 73 algèbre

## Énoncé exercice 73

On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de $A$.
2. Déterminer toutes les matrices qui commutent avec la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

   En déduire que l'ensemble des matrices qui commutent avec $A$ est $\mathrm{Vect}\,(\mathrm{I}_2, A)$.

## Corrigé exercice 73

1. On obtient le polynôme caractéristique $\chi_A = (X-3)(X+2)$ et donc $\mathrm{Sp}A = \{-2, 3\}$.
   Après résolution des équations $AX = 3X$ et $AX = -2X$, on obtient :
   $E_3 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ et $E_{-2} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}\right)$.
2. Soit $N = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
   $ND = DN \iff \begin{cases} -2b = 3b \\ 3c = -2c \end{cases} \iff b = c = 0 \iff N$ diagonale.
   On a $A = PDP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

   Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

   $AM = MA \Leftrightarrow PDP^{-1}M = MPDP^{-1} \Leftrightarrow D(P^{-1}MP) = (P^{-1}MP)D \Leftrightarrow P^{-1}MP$ commute avec $D$.
   C'est-à-dire, $AM = MA \Leftrightarrow P^{-1}MP = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \Leftrightarrow M = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} P^{-1}$.
   Donc, l'espace des matrices commutant avec $A$ est $C(A) = \left\{ P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} P^{-1} \text{ avec } (a, d) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.
   C'est un plan vectoriel.
   De plus, pour des raisons d'inclusion ($\mathrm{I}_2 \in C(A)$ et $A \in C(A)$) et d'égalité des dimensions, $C(A) = \mathrm{Vect}(\mathrm{I}_2, A)$.

# EXERCICE 87 algèbre

## Énoncé exercice 87

Soient $a_0, a_1, \cdots, a_n$ , $n+1$ réels deux à deux distincts.

1. Montrer que si $b_0, b_1, \cdots, b_n$ sont $n+1$ réels quelconques, alors il existe un unique polynôme $P$ vérifiant
$$\deg P \leqslant n \text{ et } \forall i \in [\![0, n]\!],\ P(a_i) = b_i.$$
2. Soit $k \in [\![0, n]\!]$.
Expliciter ce polynôme $P$, que l'on notera $L_k$, lorsque :
$$\forall i \in [\![0, n]\!],\quad b_i = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i \neq k \\ 1 & \text{si} \quad i = k \end{cases}$$
3. Prouver que $\forall p \in [\![0, n]\!]$ , $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k^p L_k = X^p$.

## Corrigé exercice 87

1. L'application $u : \begin{array}{lcl} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}^{n+1} \\ P & \mapsto & (P(a_0), P(a_1), \cdots, P(a_n)) \end{array}$ est linéaire.
Montrons que $\mathrm{Ker} u = \{0\}$.
Si $P \in \mathrm{Ker} u$, alors $P(a_0) = P(a_1) = \cdots = P(a_n) = 0$ et le polynôme $P$, de degré inférieur ou égal à $n$, admet $n+1$ racines distinctes.
Donc $P = 0$.
Ainsi $u$ est injective et comme $\dim \mathbb{R}_n[X] = n+1 = \dim \mathbb{R}^{n+1}$ , $u$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
Enfin les conditions recherchées sont équivalentes à : $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et $u(P) = (b_0, \ldots, b_n)$.
La bijectivité de $u$ dit que ce problème admet une unique solution $P$ et on a $P = u^{-1}((b_0, \ldots, b_n))$.

2. Pour ce choix de $b_0, b_1, \cdots, b_n$ le polynôme $L_k$ vérifie les conditions :
$$\deg L_k \leqslant n \text{ et } \forall i \in [\![0, n]\!],\ L_k(a_i) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i \neq k \\ 1 & \text{si} \quad i = k \end{cases}$$
Comme $a_0, \ldots, a_{k-1}, a_{k+1}, \ldots, a_n$ sont $n$ racines distinctes de $L_k$ qui est de degré $\leqslant n$, il existe nécessairement $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que
$$L_k = \lambda \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} (X - a_i)$$
La condition supplémentaire $L_k(a_k) = 1$ donne $\lambda = \dfrac{1}{\displaystyle\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} (a_k - a_i)}$ et finalement :
$$L_k = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \frac{X - a_i}{a_k - a_i}$$

3. Soit $p \in [\![0, \ldots, n]\!]$.
Les polynômes $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k^p L_k$ et $X^p$ vérifient les mêmes conditions d'interpolation :
$$\deg P \leqslant n \quad \text{et} \quad \forall i \in \{0, \cdots, n\} \quad P(a_i) = a_i^p$$
Par l'unicité vue en première question, on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k^p L_k = X^p$.

# EXERCICE 99 probabilités

## Énoncé exercice 99

1. Rappeler l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
2. Soit $(Y_n)$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, de même loi et admettant un moment d'ordre 2. On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k$.

   Prouver que : $\forall\, a \in ]0, +\infty[$, $P\left(\left|\dfrac{S_n}{n} - E(Y_1)\right| \geqslant a\right) \leqslant \dfrac{V(Y_1)}{na^2}$.
3. **Application** : On effectue des tirages successifs, avec remise, d'une boule dans une urne contenant 2 boules rouges et 3 boules noires.

   À partir de quel nombre de tirages peut-on garantir à plus de 95% que la proportion de boules rouges obtenues restera comprise entre $0,35$ et $0,45$ ?

   **Indication** : considérer la suite $(Y_i)$ de variables aléatoires de Bernoulli où $Y_i$ mesure l'issue du $i^{\text{ème}}$ tirage.

## Corrigé exercice 99

1. Soit $a \in ]0, +\infty[$. Pour toute variable aléatoire $X$ admettant un moment d'ordre 2, on a :

   $P\left(|X - E(X)| \geqslant a\right) \leqslant \dfrac{V(X)}{a^2}$.
2. On pose $X = \dfrac{S_n}{n}$.

   Par linéarité de l'espérance et comme toutes les variables $Y_i$ ont la même espérance, on a $E(X) = E(Y_1)$.

   De plus, comme les variables sont mutuellement indépendantes, on a $V(X) = \dfrac{1}{n^2}V(S_n) = \dfrac{1}{n}V(Y_1)$.

   Alors, en appliquant 1. à $X$, on obtient le résultat souhaité.
3. $\forall i \in \mathbb{N}^*$, on considère la variable aléatoire $Y_i$ valant 1 si la $i^{\text{ème}}$ boule tirée est rouge et 0 sinon.

   $Y_i$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $p$ avec $p = \dfrac{2}{5} = 0,4$ .

   Les variables $Y_i$ suivent la même loi, sont mutuellement indépendantes et admettent des moments d'ordre 2.

   On a d'après le cours, $\forall i \in \mathbb{N}$, $E(Y_i) = 0,4$ et $V(Y_i) = 0,4(1 - 0,4) = 0,24$.

   On pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$. $S_n$ représente le nombre de boules rouges obtenues au cours de $n$ tirages.

   Alors $T_n = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{n}$ représente la proportion de boules rouges obtenues au cours de $n$ tirages.

   On cherche à partir de combien de tirages on a $P(0,35 \leqslant T_n \leqslant 0,45) > 0,95$.

   Or $P\left(0,35 \leqslant T_n \leqslant 0,45\right) = P\left(0,35 \leqslant \dfrac{S_n}{n} \leqslant 0,45\right) = P\left(-0,05 \leqslant \dfrac{S_n}{n} - E(Y_1) \leqslant 0,05\right)$

   $= P\left(\left|\dfrac{S_n}{n} - E(Y_1)\right| \leqslant 0,05\right) = 1 - P\left(\left|\dfrac{S_n}{n} - E(Y_1)\right| > 0,05\right)$.

   On a donc $P\left(0,35 \leqslant T_n \leqslant 0,45\right) = 1 - P\left(\left|\dfrac{S_n}{n} - E(Y_1)\right| > 0,05\right)$.

   Or, d'après la question précédente, $P\left(\left|\dfrac{S_n}{n} - E(Y_1)\right| \geqslant 0,05\right) \leqslant \dfrac{0,24}{n(0,05)^2}$.

   Donc $P\left(0,35 \leqslant T_n \leqslant 0,45\right) \geqslant 1 - \dfrac{0,24}{n(0,05)^2}$.

   Il suffit alors pour répondre au problème de chercher à partir de quel rang $n$, on a $1 - \dfrac{0,24}{n(0,05)^2} \geqslant 0,95$.

   La résolution de cette inéquation donne $n \geqslant \dfrac{0,24}{0,05^3}$ c'est-à-dire $n \geqslant 1920$.

# EXERCICE 107 probabilités

## Énoncé exercice 107

On dispose de deux urnes $U_1$ et $U_2$.
L'urne $U_1$ contient deux boules blanches et trois boules noires.
L'urne $U_2$ contient quatre boules blanches et trois boules noires.
On effectue des tirages successifs dans les conditions suivantes :
on choisit une urne au hasard et on tire une boule dans l'urne choisie.
On note sa couleur et on la remet dans l'urne d'où elle provient.
Si la boule tirée était blanche, le tirage suivant se fait dans l'urne $U_1$.
Sinon le tirage suivant se fait dans l'urne $U_2$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $B_n$ l'événement « la boule tirée au $n^{\text{ième}}$ tirage est blanche » et on pose $p_n = P(B_n)$.

1. Calculer $p_1$.
2. Prouver que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $p_{n+1} = -\dfrac{6}{35}p_n + \dfrac{4}{7}$.
3. En déduire, pour tout entier naturel $n$ non nul, la valeur de $p_n$.

## Corrigé exercice 107

1. Notons $U_1$ l'événement le premier tirage se fait dans l'urne $U_1$.
   Notons $U_2$ l'événement le premier tirage se fait dans l'urne $U_2$.
   $(U_1, U_2)$ est un système complet dévénements.
   Donc d'après la formule des probabilités totales, $p_1 = P(B_1) = P_{U_1}(B_1)P(U_1) + P_{U_2}(B_1)P(U_2)$.
   Donc $p_1 = \dfrac{2}{5} \times \dfrac{1}{2} + \dfrac{4}{7} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{17}{35}$
   On a donc $p_1 = \dfrac{17}{35}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   $(B_n, \overline{B_n})$ est un système complet d'événements.
   Donc, d'après la formule des probabilités totales, $P(B_{n+1}) = P_{B_n}(B_{n+1})P(B_n) + P_{\overline{B_n}}(B_{n+1})P(\overline{B_n})$.
   Alors en tenant compte des conditions de tirage, on a $p_{n+1} = \dfrac{2}{5}p_n + \dfrac{4}{7}(1 - p_n)$.
   Donc, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$. $p_{n+1} = -\dfrac{6}{35}p_n + \dfrac{4}{7}$.

3. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $p_{n+1} = -\dfrac{6}{35}p_n + \dfrac{4}{7}$.
   Donc $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite arithmético-géométrique.
   On résout l'équation $l = -\dfrac{6}{35}l + \dfrac{4}{7}$ et on trouve $l = \dfrac{20}{41}$.
   On considère alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$ , $u_n = p_n - l$.
   $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est géométrique de raison $-\dfrac{6}{35}$, donc, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \left(-\dfrac{6}{35}\right)^{n-1} u_1$.
   Or $u_1 = p_1 - l = \dfrac{17}{35} - \dfrac{20}{41} = -\dfrac{3}{1435}$.
   On en déduit que, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $p_n = u_n + l$, c'est-à-dire $p_n = -\dfrac{3}{1435}\left(-\dfrac{6}{35}\right)^{n-1} + \dfrac{20}{41}$.