EXERCICE 10 analyse

Énoncé exercice 10

On pose $f_n(x) = \left(x^2+1\right) \dfrac{ne^x + xe^{-x}}{n+x}$.

1. Démontrer que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[0,1]$.
2. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^1 \left(x^2+1\right) \frac{ne^x + xe^{-x}}{n+x} \mathrm{d}x$.

Corrigé exercice 10

1. Pour $x \in [0,1]$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = (x^2+1)\mathrm{e}^x$.
   La suite de fonctions (f_n) converge simplement vers $f : x \mapsto (x^2+1)\mathrm{e}^x$ sur $[0,1]$.
   On a $\forall\, x \in [0,1]$, $f_n(x) - f(x) = (x^2+1)\dfrac{x(\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^x)}{n+x}$, et donc : $\forall x \in [0,1]$, $|f_n(x) - f(x)| \leqslant \dfrac{2\mathrm{e}}{n}$.
   Ce majorant indépendant de x tend vers 0 quand $n \to +\infty$, donc la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers f sur $[0,1]$.
2. Par convergence uniforme sur le segment $[0,1]$ de cette suite de fonctions continues sur $[0,1]$, on peut intervertir limite et intégrale.
   On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^1 (x^2+1)\frac{n\mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^{-x}}{n+x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (x^2+1)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.
   Puis, en effectuant deux intégrations par parties, on trouve $\displaystyle\int_0^1 (x^2+1)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = 2\mathrm{e} - 3$.

Énoncé exercice 3

1. On pose $g(x) = \mathrm{e}^{2x}$ et $h(x) = \dfrac{1}{1+x}$.
   Calculer, pour tout entier naturel k, la dérivée d'ordre k des fonctions g et h sur leurs ensembles de définitions respectifs.
2. On pose $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{1+x}$.
   En utilisant la formule de Leibniz concernant la dérivée $n^{\text{ième}}$ d'un produit de fonctions, déterminer, pour tout entier naturel n et pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$, la valeur de $f^{(n)}(x)$.

Corrigé exercice 3

1. g est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et h est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$.
   On prouve, par récurrence, que :
   $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $g^{(k)}(x) = 2^k\mathrm{e}^{2x}$ et $\forall\, x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$, $h^{(k)}(x) = \dfrac{(-1)^k k!}{(1+x)^{k+1}}$.
2. g et h sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ donc, d'après la formule de Leibniz, f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ et $\forall\, x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$:
   $$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g^{(n-k)}(x)h^{(k)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k}\mathrm{e}^{2x}\frac{(-1)^k k!}{(1+x)^{k+1}} = n!\mathrm{e}^{2x}\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k 2^{n-k}}{(n-k)!(1+x)^{k+1}}.$$