EXERCICE 5 analyse

Énoncé exercice 5

1. On considère la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n\left(\ln n\right)^{\alpha}}$ où $n \geqslant 2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

   (a) **Cas $\boldsymbol{\alpha \leqslant 0}$**

   En utilisant une minoration très simple de u_n, démontrer que la série diverge.

   (b) **Cas $\boldsymbol{\alpha > 0}$**

   Étudier la nature de la série.
   Indication : on pourra utiliser la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{x(\ln x)^{\alpha}}$.

2. Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{\left(\mathrm{e} - \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}}{\left(\ln(n^2+n)\right)^2}$.

Corrigé exercice 5

1. (a) Cas $\alpha \leqslant 0$
   $\forall\, n \geqslant 2$, $\ln n \geqslant \ln 2$ donc $\left(\ln n\right)^{\alpha} \leqslant \left(\ln 2\right)^{\alpha}$.
   On en déduit que : $\forall\, n \geqslant 2$, $u_n \geqslant \dfrac{1}{\left(\ln 2\right)^{\alpha}}\dfrac{1}{n}$.
   Or $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{n}$ diverge.
   Donc , par critère de minoration pour les séries à termes positifs, on en déduit que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} u_n$ diverge.

   (b) Cas $\alpha > 0$
   La fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x(\ln x)^{\alpha}}$ est continue par morceaux, décroissante et positive sur $[2, +\infty[$ donc :
   $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} f(n)$ et $\displaystyle\int_2^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ sont de même nature.
   Puisque $\displaystyle\int_2^{X} f(x)\,\mathrm{d}x \underset{t=\ln x}{=} \int_{\ln 2}^{\ln(X)} \frac{\mathrm{d}t}{t^{\alpha}}$, on peut affirmer que : $\displaystyle\int_2^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge $\Longleftrightarrow \alpha > 1$.
   On en déduit que : $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} f(n)$ converge $\Longleftrightarrow \alpha > 1$.

2. On pose, pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, $u_n = \dfrac{\left(\mathrm{e} - \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}}{\left(\ln(n^2+n)\right)^2}$.
   Au voisinage de $+\infty$, $\mathrm{e} - \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n} = \mathrm{e} - \mathrm{e}^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \mathrm{e} - \mathrm{e}^{n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} = \mathrm{e} - \mathrm{e}^{1-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)} = \dfrac{\mathrm{e}}{2n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.
   On en déduit qu'au voisinage de $+\infty$, $\mathrm{e} - \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\mathrm{e}}{2n}$.
   De plus, au voisinage de $+\infty$, $\ln\left(n^2+n\right) = 2\ln n + \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = 2\ln n + \dfrac{1}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.
   Donc $\ln\left(n^2+n\right) \underset{+\infty}{\sim} 2\ln n$.
   Et comme $\mathrm{e}^{\frac{1}{n}} \underset{+\infty}{\sim} 1$, on en déduit que $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\mathrm{e}}{8} \times \dfrac{1}{n\left(\ln n\right)^2}$.
   Or, d'après 1.(b), $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{n\left(\ln n\right)^2}$ converge.
   Donc, par critère d'équivalence pour les séries à termes positifs, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} u_n$ converge.

EXERCICE 16 analyse

Énoncé exercice 16

On considère la série de fonctions de terme général u_n définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [0,1],\quad u_n(x) = \ln\left(1+\frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}\ .$$

On pose, lorsque la série converge, $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\ \ln\left(1+\frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}\right]$.

1. Démontrer que S est dérivable sur $[0,1]$.
2. Calculer $S'(1)$.

Corrigé exercice 16

1. Soit $x \in [0,1]$.
   Si $x = 0$, $u_n(0) = 0$ et donc $\sum u_n(0)$ converge.
   Si $x \neq 0$, comme au voisinage de $+\infty$, $u_n(x) = -\dfrac{x^2}{2n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, alors $|u_n(x)| \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{x^2}{2n^2}$.
   Or $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}$ converge donc, par critère de comparaison des séries à termes positifs, $\sum u_n(x)$ converge absolument, donc converge.
   On en déduit que la série des fonctions u_n converge simplement sur $[0,1]$.

   La fonction S est donc définie sur $[0,1]$.
   $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, u_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ et $\forall\, x \in [0,1]$, $u_n'(x) = \dfrac{1}{x+n} - \dfrac{1}{n} = \dfrac{-x}{n(x+n)}$.

   Donc $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\forall\, x \in [0,1]$, $|u_n'(x)| \leqslant \dfrac{1}{n^2}$.
   On en déduit que $\|u_n'\|_\infty = \displaystyle\sup_{x\in[0,1]} |u_n'(x)| \leqslant \frac{1}{n^2}$.
   Or $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}$ converge.
   Donc $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n'$ converge normalement, donc uniformément sur $[0,1]$.
   On peut alors affirmer que la fonction S est de classe $\mathcal{C}^1$. Elle est donc dérivable sur $[0,1]$.

   Et on a : $\forall\, x \in [0;1]$, $S'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n'(x)$.

2. En vertu de ce qui précède, $S'(1) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n'(1) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right)$.
   Or $\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{N+1} - 1 \xrightarrow[N\to+\infty]{} -1$.
   Donc $S'(1) = -1$.

EXERCICE 32 analyse

Énoncé exercice 32

Soit l'équation différentielle : $x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0$.

1. Trouver les solutions de cette équation différentielle développables en série entière sur un intervalle $]-r, r[$ de $\mathbb{R}$, avec $r > 0$.
   Déterminer la somme des séries entières obtenues.

Corrigé exercice 32

1. Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et de somme S.
   Pour tout $x \in]-R, R[$, $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, $S'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$ et $S''(x) = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1) n a_{n+1} x^{n-1}$.
   Donc $x(x-1)S''(x) + 3xS'(x) + S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left((n+1)^2 a_n - n(n+1)a_{n+1}\right) x^n$.

   Par unicité des coefficients d'un développement en série entière, la fonction S est solution sur $]-R, R[$ de l'équation étudiée si, et seulement si, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $(n+1)^2 a_n - n(n+1)a_{n+1} = 0$.
   C'est-à-dire : $\forall n \in \mathbb{N}$, $n a_{n+1} = (n+1) a_n$.
   Ce qui revient à : $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = n a_1$.
   C'est à dire $S(x) = a_1 \sum_{n=1}^{+\infty} n x^n$.

   Le rayon de convergence de la série entière $\sum n x^n$ étant égal à 1, on peut affirmer que les fonctions développables en série entière solutions de l'équation sont les fonctions :
   $x \mapsto a_1 \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n x^n = a_1 x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{a_1 x}{(1-x)^2}$ définies sur $]-1, 1[$, avec $a_1 \in \mathbb{R}$.