

EXERCICE 87 algèbre

Énoncé exercice 87

Soient a_0, a_1, \dots, a_n , $n + 1$ réels deux à deux distincts.

1. Montrer que si b_0, b_1, \dots, b_n sont $n + 1$ réels quelconques, alors il existe un unique polynôme P vérifiant

$$\deg P \leq n \text{ et } \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, P(a_i) = b_i.$$

2. Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

Expliciter ce polynôme P , que l'on notera L_k , lorsque :

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, b_i = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq k \\ 1 & \text{si } i = k \end{cases}$$

3. Prouver que $\forall p \in \llbracket 0, n \rrbracket, \sum_{k=0}^n a_k^p L_k = X^p$.

Corrigé exercice 87

1. L'application $u : \begin{matrix} \mathbb{R}_n[X] & \rightarrow & \mathbb{R}^{n+1} \\ P & \mapsto & (P(a_0), P(a_1), \dots, P(a_n)) \end{matrix}$ est linéaire.

Montrons que $\text{Ker} u = \{0\}$.

Si $P \in \text{Ker} u$, alors $P(a_0) = P(a_1) = \dots = P(a_n) = 0$ et le polynôme P , de degré inférieur ou égal à n , admet $n + 1$ racines distinctes.

Donc $P = 0$.

Ainsi u est injective et comme $\dim \mathbb{R}_n[X] = n + 1 = \dim \mathbb{R}^{n+1}$, u est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Enfin les conditions recherchées sont équivalentes à : $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et $u(P) = (b_0, \dots, b_n)$.

La bijectivité de u dit que ce problème admet une unique solution P et on a $P = u^{-1}((b_0, \dots, b_n))$.

2. Pour ce choix de b_0, b_1, \dots, b_n le polynôme L_k vérifie les conditions :

$$\deg L_k \leq n \text{ et } \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, L_k(a_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq k \\ 1 & \text{si } i = k \end{cases}$$

Comme $a_0, \dots, a_{k-1}, a_{k+1}, \dots, a_n$ sont n racines distinctes de L_k qui est de degré $\leq n$, il existe nécessairement $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que

$$L_k = \lambda \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n (X - a_i)$$

La condition supplémentaire $L_k(a_k) = 1$ donne $\lambda = \frac{1}{\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n (a_k - a_i)}$ et finalement :

$$L_k = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \frac{X - a_i}{a_k - a_i}$$

3. Soit $p \in \llbracket 0, \dots, n \rrbracket$.

Les polynômes $\sum_{k=0}^n a_k^p L_k$ et X^p vérifient les mêmes conditions d'interpolation :

$$\deg P \leq n \text{ et } \forall i \in \{0, \dots, n\} P(a_i) = a_i^p$$

Par l'unicité vue en première question, on a $\sum_{k=0}^n a_k^p L_k = X^p$.

EXERCICE 99 probabilités

Énoncé exercice 99

1. Rappeler l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
2. Soit (Y_n) une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, de même loi et admettant un moment

d'ordre 2. On pose $S_n = \sum_{k=1}^n Y_k$.

Prouver que : $\forall a \in]0, +\infty[$, $P\left(\left|\frac{S_n}{n} - E(Y_1)\right| \geq a\right) \leq \frac{V(Y_1)}{na^2}$.

3. **Application** : On effectue des tirages successifs, avec remise, d'une boule dans une urne contenant 2 boules rouges et 3 boules noires.

À partir de quel nombre de tirages peut-on garantir à plus de 95% que la proportion de boules rouges obtenues restera comprise entre 0,35 et 0,45 ?

Indication : considérer la suite (Y_i) de variables aléatoires de Bernoulli où Y_i mesure l'issue du $i^{\text{ème}}$ tirage.

Corrigé exercice 99

1. Soit $a \in]0, +\infty[$. Pour toute variable aléatoire X admettant un moment d'ordre 2, on a :

$$P(|X - E(X)| \geq a) \leq \frac{V(X)}{a^2}.$$

2. On pose $X = \frac{S_n}{n}$.

Par linéarité de l'espérance et comme toutes les variables Y_i ont la même espérance, on a $E(X) = E(Y_1)$.

De plus, comme les variables sont mutuellement indépendantes, on a $V(X) = \frac{1}{n^2}V(S_n) = \frac{1}{n}V(Y_1)$.

Alors, en appliquant 1. à X , on obtient le résultat souhaité.

3. $\forall i \in \mathbb{N}^*$, on considère la variable aléatoire Y_i valant 1 si la $i^{\text{ème}}$ boule tirée est rouge et 0 sinon.

Y_i suit une loi de Bernoulli de paramètre p avec $p = \frac{2}{5} = 0,4$.

Les variables Y_i suivent la même loi, sont mutuellement indépendantes et admettent des moments d'ordre 2.

On a d'après le cours, $\forall i \in \mathbb{N}$, $E(Y_i) = 0,4$ et $V(Y_i) = 0,4(1 - 0,4) = 0,24$.

On pose $S_n = \sum_{i=1}^n Y_i$. S_n représente le nombre de boules rouges obtenues au cours de n tirages.

Alors $T_n = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{n}$ représente la proportion de boules rouges obtenues au cours de n tirages.

On cherche à partir de combien de tirages on a $P(0,35 \leq T_n \leq 0,45) > 0,95$.

$$\begin{aligned} \text{Or } P(0,35 \leq T_n \leq 0,45) &= P\left(0,35 \leq \frac{S_n}{n} \leq 0,45\right) = P\left(-0,05 \leq \frac{S_n}{n} - E(Y_1) \leq 0,05\right) \\ &= P\left(\left|\frac{S_n}{n} - E(Y_1)\right| \leq 0,05\right) = 1 - P\left(\left|\frac{S_n}{n} - E(Y_1)\right| > 0,05\right). \end{aligned}$$

On a donc $P(0,35 \leq T_n \leq 0,45) = 1 - P\left(\left|\frac{S_n}{n} - E(Y_1)\right| > 0,05\right)$.

Or, d'après la question précédente, $P\left(\left|\frac{S_n}{n} - E(Y_1)\right| \geq 0,05\right) \leq \frac{0,24}{n(0,05)^2}$.

Donc $P(0,35 \leq T_n \leq 0,45) \geq 1 - \frac{0,24}{n(0,05)^2}$.

Il suffit alors pour répondre au problème de chercher à partir de quel rang n , on a $1 - \frac{0,24}{n(0,05)^2} \geq 0,95$.

La résolution de cette inéquation donne $n \geq \frac{0,24}{0,05^3}$ c'est-à-dire $n \geq 1920$.

EXERCICE 107 probabilités

Énoncé exercice 107

On dispose de deux urnes U_1 et U_2 .

L'urne U_1 contient deux boules blanches et trois boules noires.

L'urne U_2 contient quatre boules blanches et trois boules noires.

On effectue des tirages successifs dans les conditions suivantes :

on choisit une urne au hasard et on tire une boule dans l'urne choisie.

On note sa couleur et on la remet dans l'urne d'où elle provient.

Si la boule tirée était blanche, le tirage suivant se fait dans l'urne U_1 .

Sinon le tirage suivant se fait dans l'urne U_2 .

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n l'événement « la boule tirée au $n^{\text{ième}}$ tirage est blanche » et on pose $p_n = P(B_n)$.

1. Calculer p_1 .
2. Prouver que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, p_{n+1} = -\frac{6}{35}p_n + \frac{4}{7}$.
3. En déduire, pour tout entier naturel n non nul, la valeur de p_n .

Corrigé exercice 107

1. Notons U_1 l'événement le premier tirage se fait dans l'urne U_1 .
Notons U_2 l'événement le premier tirage se fait dans l'urne U_2 .
 (U_1, U_2) est un système complet d'événements.
Donc d'après la formule des probabilités totales, $p_1 = P(B_1) = P_{U_1}(B_1)P(U_1) + P_{U_2}(B_1)P(U_2)$.
Donc $p_1 = \frac{2}{5} \times \frac{1}{2} + \frac{4}{7} \times \frac{1}{2} = \frac{17}{35}$
On a donc $p_1 = \frac{17}{35}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
 $(B_n, \overline{B_n})$ est un système complet d'événements.
Donc, d'après la formule des probabilités totales, $P(B_{n+1}) = P_{B_n}(B_{n+1})P(B_n) + P_{\overline{B_n}}(B_{n+1})P(\overline{B_n})$.
Alors en tenant compte des conditions de tirage, on a $p_{n+1} = \frac{2}{5}p_n + \frac{4}{7}(1 - p_n)$.
Donc, $\forall n \in \mathbb{N}^*, p_{n+1} = -\frac{6}{35}p_n + \frac{4}{7}$.
3. $\forall n \in \mathbb{N}^*, p_{n+1} = -\frac{6}{35}p_n + \frac{4}{7}$.
Donc $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite arithmético-géométrique.
On résout l'équation $l = -\frac{6}{35}l + \frac{4}{7}$ et on trouve $l = \frac{20}{41}$.
On considère alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = p_n - l$.
 $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est géométrique de raison $-\frac{6}{35}$, donc, $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \left(-\frac{6}{35}\right)^{n-1} u_1$.
Or $u_1 = p_1 - l = \frac{17}{35} - \frac{20}{41} = -\frac{3}{1435}$.
On en déduit que, $\forall n \in \mathbb{N}^*, p_n = u_n + l$, c'est-à-dire $p_n = -\frac{3}{1435} \left(-\frac{6}{35}\right)^{n-1} + \frac{20}{41}$.