Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

Exercice 1 : Déterminer les éléments propres des endomorphismes suivants :

1. $f : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X],\ P \mapsto P'$
2. φ tel que : $\forall f \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \varphi(f) = f'$
3. f tel que : $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), f(M) = M + \mathrm{tr}(M) I_n$

Exercice 2 : Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe un vecteur $x_0 \in E$ tel que la famille $(x_0, u(x_0), ..., u^{n-1}(x_0))$ soit libre.
Montrer que seuls les polynômes en u commutent avec u.

$\longrightarrow$
La famille $(x_0, u(x_0), ..., u^{n-1}(x_0))$ constitue une base d eE. Soit $v \in \mathcal{L}(E)$ commutant avec u. On peut alors écrire $v(x_0) = a_0 x_0 + a_1 u(x_0) + a_2 u^2(x_0) + ... + a_{n-1} u^{n-1}(x_0)$. On remarque que $v(u^k(x_0)) = u^k(v(x_0)) = a_0(u^k(x_0)) + ... + a_{n-1} u^{n-1}(u^k(x_0)) = P(u)(u^k(x_0))$, avec $P = ...$
Sur une base, v s'écrit comme un polynôme en u : c'est donc le cas sur tout E, et on a bien montré que v est un polynôme en u.

Exercice 3 : Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Justifier l'existence d'un entier $p \geqslant 0$ tel que la famille $(\mathrm{id}, u, ..., u^p)$ soit liée. En déduire que u possède un polynôme annulateur non nul.

$\longrightarrow$ Les vecteurs de $(\mathrm{id}, u, ..., u^p)$ évoluent dans (E) qui est de dimension n^2. Pour $p = n^2 + 1$, la famille est nécessairement liée. Il existe une combinaison linéaire des u^k non triviale nulle, qui nous permet de trouver un polynôme annulateur non nul de u.

Exercice 4 : Soit $E = \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et φ l'application qui, à tout élément f de E associe la fonction $g = \varphi(f)$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(0) = f(0)$ et pour $x \neq 0$: $g(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$.
Montrer que φ est un endomorphisme de E et déterminer ses éléments propres.

$\longrightarrow$ L'énoncé doit être décomposé : pour montrer que φ est un endomorphisme de E, on montre que pour tout f, $\varphi(f)$ est un élément de E. Et on commence par montrer que pour tout f de E et pour tout x réel, $\varphi(f)(x)$ existe. Or, pour $x = 0$, par définition, $g(x) = f(x) = f(0)$, et pour $x \neq 0$, l'intégrale sur $[0, x]$ d'une fonction qui y est continue et réelle (la fonction f) est un réel. Ainsi $\varphi(f)$ est bien une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Pour montrer que $\varphi(f)$ est continue, on remarque que $x \mapsto \displaystyle\int_0^x f$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ (on obtient, par produit de fonctions continues, la continuité de $\varphi(f)$ sur $\mathbb{R}^*$), et, plus encore, nulle en 0 et de dérivée continue égale à f. Ainsi $g(x) = \dfrac{F(x) - F(0)}{x - 0} \underset{x \to 0}{\to} f(0)$. La continuité est anisi assurée.
On n'a pour le moment montré que le côté que le côté "endo". Il faut bien sûr montrer que φ est un morphisme, ce qui dérive de la linéarité de l'intégrale.
☞**Point rédaction**
Soient f et g deux fonctions de E et λ un réel quelconque.
Alors $f + \lambda g$ est une fonction de E, et on observe :
1) $\varphi(f + \lambda g)(0) = (f + \lambda g)(0) = f(0) + \lambda g(0) = \varphi(f)(0) + \lambda\varphi(g)(0)$
2) Pour tout $x \neq 0$, $\varphi(f + \lambda g)(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x (f + \lambda g)(t)\mathrm{d}t = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x (f(t) + \lambda g(t))\mathrm{d}t$, puis, par linéarité de l'intégrale de fonctions continues sur un segment, $\varphi(f + \lambda g)(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t + \lambda\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x g(t)\mathrm{d}t = \varphi(f)(x) + \lambda\varphi(g)(x)$
Ainsi, et puisque c'est valable pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(f + \lambda g) = \varphi(f) + \lambda\varphi(g)$.

Et puisque cette dernière relation est vraie pour toutes fonctions de E f et g et tout réel λ, la fonction φ est bien linéaire.
Comme $\varphi(E)$ est inclus dans E et φ est linéaire, $\boxed{\varphi \text{ est un endomorphisme de } E}$.

Pour déterminer les éléments propres de φ, on raisonne (ici) par analyse et synthèse. D'abord, on écrit $\varphi(f) = \lambda f$, et on cherche à comprendre ce que cela implique.
Supposons donc qu'on ait l'égalité, pour tout x réel, $\lambda f(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$.

Les remarques précédentes permettent de remplacer cette expression par $\lambda F'(x) = \dfrac{1}{x}F(x)$, avec F fonction de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
On reconnaît une équation différentielle homogène que l'on peut mettre sous forme réduite $y' - \dfrac{1}{\lambda x}y = 0$.
On résoud donc cette équation différentielle, mais il faut ensuite vérifier que les fonctions obtenues appartiennent bien à E, donc que F est de classe $\mathcal{C}^1$. Il faut donc vérifier la continuité et la continuité de la dérivée en 0, en combinant les solutions obtenues sur $\mathbb{R}^+$ et $\mathbb{R}^-$.
On répond enfin à l'énoncé en donnant les couples $(\lambda, E_\lambda(\varphi))$.

Exercice 5 : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que, pour toute valeur propre $\lambda \neq 0$, on a : $E_\lambda(f) \subset \mathrm{Im}(f)$.
On suppose E de dimension finie et f diagonalisable. En déduire que : $\ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = E$.

$\longrightarrow$ ☞**Point réflexe :** L'énoncé commence par "montrer que pour toute valeur propre $\lambda \neq 0$". Il y a de fortes chances que votre réponse commence par "Soit $\lambda \neq 0$, montrons que ..."

Soit $\lambda \neq 0$ une valeur propre de $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrons que $E_\lambda(f) \subset \mathrm{Im}(f)$:
Soit $x \in E_\lambda(f)$. Alors $f(x) = \lambda x$, et, par linéarité, $f(\dfrac{x}{\lambda}) = x$. Ainsi x est bien dans l'image de E. Ceci étant vrai pour tout x de $E_\lambda(f)$, on a l'inclusion $\boxed{E_\lambda(f) \subset \mathrm{Im}(f)}$.

Supposons maintenant que E est de dimension finie et que f est diagonalisable (remarquez comme je n'ai aucune honte à reprendre les mots de l'énoncé, ni à les réorganiser pour servir mon raisonnement).
Montrons que $\ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = E$.
Puisque f est diagonalisable, il existe une base de E formée de vecteurs propres de f, et E est somme directe de ses sous-espaces propres.
La sous-question précédente assure que les s.e.p. associés à des v.p. non nulles sont inclus dans l'image de f, et le s.e.v. engendré par ces s.e.p. est en somme directe avec $\ker f$, s.e.p. associé à la valeur propre 0. Puisque E est somme directe de ses s.e.p., on en déduit que $\ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = E$.

La preuve pouvait aussi se faire "les mains dans le cambouis" :

Soit $x \in \ker(f) \cap \mathrm{Im}(f)$. Il existe un y dans E, tel que $x = f(y)$. Or, un tel y peut s'écrire sous la forme $\displaystyle\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} y_\lambda$, avec $y_\lambda \in E_\lambda(f)$ pour tout λ (car les s.e.p. sont en somme directe et, f étant diagonalisable, engendrent E).
Alors $x = f(y) = \displaystyle\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} f(y_\lambda) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} \lambda y_\lambda$.
Puisque $x \in \ker(f)$, $f(x) = 0$, ce qui s'écrit $0 = \displaystyle\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} \lambda^2 y_\lambda$. Mais les s.e.p. étant en somme directe, et $\lambda^2 y_\lambda \in E_\lambda(f)$, ceci implique que chaque $\lambda^2 y_\lambda$ est nul. Pour $\lambda \neq 0$, $y_\lambda = 0$. On obtient finalement que $y = y_0$, puis que $x = f(y) = 0 \times y = 0$. Ainsi la somme est directe.

Il reste à montrer qu'elle vaut E tout entier. Pour cela, on réutilise la base des vecteurs propres : tout x peut s'écrire comme combinaison linéaire de ces vecteurs. On sépare les vecteurs propres associés à 0 des autres, qui (sous-question précédente) appartiennent à $\mathrm{Im}(f)$. Tout x est donc somme d'un vecteur du noyau et d'un vecteur de l'image (ces deux sous-ensembles étant des s.e.v.).

Exercice 6 : Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ ($n \geqslant 2$) et f l'application qui, à tout $P \in E$, associe le reste dans la division euclidienne de P par $X^2 - 1$.
Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de f. f est-il diagonalisable ?

$\longrightarrow$ ☞**Point méthode :** Au brouillon, on teste cette application. Que vaut l'image de X, de X^2, de $X^2 + 3$, de $3X^3$?

On remarque que le degré du polynôme image est strictement inférieur à 2. Un polynôme vecteur propre associé à une v.p. non nulle est donc nécessairement de degré strictement inférieur à 2 (pour être linéairement lié avec lui-même).

Mais s'il est de degré strictement plus petit que 2, le reste dans la division donnée de ce polynôme est égal à lui-même. La seule valeur propre non nulle est donc 1, et sont vecteurs propres associés à cette v.p. tous les polynômes non nuls de degré au plus 1 (les polynômes constants ou affines non nuls donc).

Concernant la v.p. 0, elle a pour vecteur propre associé tout polynôme non nul multiple de $X^2 - 1$.

La fonction f est-elle un endomorphisme ? (question non posée par l'énoncé) Par exemple, a-t-on $f(X^2) + f(-1) = f(X^2 - 1)$, avec f dans $\mathbb{R}[X]$?

Si f était diagonalisable, il existerait une base de $\mathbb{R}[X]$ formée de vecteurs propres de f. Peut-on écrire X^3 comme une combinaison linéaire (ou comme une somme) de vecteurs propres de f ?

Exercice 7 : Lemme des noyaux Soient E un espace vectoriel sur un corps commutatif $\mathbb{K}$ et u un endomorphisme de E. Si $P_1, \ldots, P_n \in K[X]$ (avec "n" entier strictement positif) sont premiers entre eux deux à deux, alors les sous-espaces vectoriels $V_i = \ker(P_i(u))$ ($1 \leqslant i \leqslant n$) sont en somme directe et $\displaystyle\bigoplus_{i=1}^{n} V_i = \ker\left[\left(\prod_{i=1}^{n} P_i\right)(u)\right]$.

$\longrightarrow$
Par récurrence sur le nombre de polynômes premiers entre eux.

Soient P et Q premiers entre eux. Il existe ainsi U et V deux polynômes, t.q. $PU + QV = 1$.
On suppose que $PQ(u) = 0$. Alors $P(u) \circ U(u) + Q(u) \circ V(u) = \text{id}$, soit, pour tout x de E, $P(u) \circ U(u)(x) + Q(u) \circ V(u)(x) = x$.
Ceci est vrai en particulier pour x dans $\ker(PQ(u))$, soit pour tout x de E.
On pose maintenant $x_1 = P(u) \circ U(u)(x)$ et $x_2 = Q(u) \circ V(u)(x)$ et on observe que x_1 est dans $\ker(Q(u))$, et que x_2 est dans $\ker(P(u))$. De plus, $\ker(P(u)) \subset \ker(Q(u) \circ P(u)) = \ker(PQ(u))$ et $\ker(Q(u)) \subset \ker(P(u) \circ Q(u)) = \ker(QP(u)) = \ker(PQ(u))$.
Ceci nous donne l'égalité $\ker(PQ(u)) = \ker(P(u)) + \ker(Q(u))$.
Il reste à montrer que la somme est directe. Pour cela, soit x dans $\ker(P(u)) \cap \ker(Q(u))$. Alors $x = U(u) \circ P(u)(x) + V(u) \circ Q(u)(x) = 0$ (puisque les endomorphismes de la forme $P(u)$ commutent entre eux). Ainsi, on peut écrire $\ker(PQ(u)) = \ker(P(u)) \bigoplus \ker(Q(u))$.

Dans le cas où on dispose de $P_1, ..., P_i$ des polynômes premiers entre eux, on remarque que $P_1 \times ... \times P_{i-1}$ et P_i sont premiers entre eux :
$\ker(P_1 P_2 ... P_i(u)) = \ker(P_1 P_2 ... P_{i-1}(u)) \bigoplus \ker(P_i(u))$ (cas $i = 2$), puis on applique l'hypothèse de récurrence.

☞Si on dispose d'un polynôme annulateur de u scindé à racines simples $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$, on en déduit que $E = \displaystyle\bigoplus_i E_{\lambda_i}(u)$: l'endomorphisme u est donc diagonalisable.

Cet énoncé n'est pas le lemme des noyaux, il est ici tronqué. N'hésitez pas à utiliser un moteur de recherche pour en savoir plus.

Exercice 8 : Soit $E = \mathcal{C}^0([-\pi,\pi],\mathbb{R})$ et u l'application qui à f dans E associe $u(f)$ définie par : $\forall x \in [-\pi,\pi], u(f)(x) = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos(x-t)f(t)dt$. Vérifier que $u \in \mathcal{L}(E)$.
Montrer que 0 est valeur propre de u.
Si λ est une valeur propre non nulle de u, montrer que $E_\lambda(u) \subset \mathrm{Vect}(\cos,\sin)$. En déduire les éventuelles valeurs propres non nulles de u et les sous-espaces propres associés.

$\longrightarrow$ Le premier point est de montrer qu'on dispose d'un endomorphisme. Comme dans l'exercice 4, il faut bien faire attention aux espaces considérés. Ici, u prend en argument **une fonction** et renvoie donc également une **fonction**. Il reste à montrer la continuité sur $[-\pi,\pi]$, qu'on obtient grâce à une réécriture de l'intégrale.
En effet, pour toute fonction continue sur $[-\pi,\pi]$ f, par linéarité de l'intégrale, $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos(x-t)f(t)dt = \cos x \int_{-\pi}^{\pi} \cos(t)f(t)dt + \sin x \int_{-\pi}^{\pi} \sin(t)f(t)dt$, or cos et sin sont des fonctions continues et $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos(t)f(t)dt$ et $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin(t)f(t)dt$ non seulement existent (intégrale d'une fonction continue sur un segment) mais sont des scalaires : étant combinaison linéaire de fonctions continues sur $[-\pi,\pi]$, l'image de f est bien une fonction continue sur $[-\pi,\pi]$.

La linéarité, sans difficulté, provient de la linéarité de l'intégrale (voir exercice 4).

Pour montrer que 0 est valeur propre de u, on écrit au brouillon $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos(x-t)f(t)dt = 0$, et on essaie de trouver f, continue sur $[-\pi,\pi]$, qui satisfait cette égalité.
La fonction $x \mapsto \sin 2t$ convient. (Pour s'en convaincre, on écrit : $\cos(x-t)\sin 2t = ...$)

Soit maintenant λ v.p. non nulle, et $f \in E_\lambda(u)$. L'écriture précédente de $u(f)(x)$ suffit à montrer que $u(f) \in \mathrm{Vect}(\cos,\sin)$, ce qui assure l'inclusion demandée $E_\lambda(u) \subset \mathrm{Vect}(\cos,\sin)$.

On calcule donc $u(a\cos + b\sin)) = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos(x-t)(a\cos t + b\sin t)dt = \cos x \int_{-\pi}^{\pi} \cos(t)(a\cos t + b\sin t)dt + \sin x \int_{-\pi}^{\pi} \sin(t)(a\cos t + b\sin t)dt = a\cos x \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(t)dt + b\sin x \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(t)dt = a\pi\cos x + b\pi\sin x = \pi(a\cos + b\sin)(x)$. La seule valeur propre non nulle est π, le s.e.p. associé est $\mathrm{Vect}(\cos,\sin)$.

Exercice 9 : Soit E un e.v. de dimension finie $n > 0$, H un hyperplan de E et $f \in \mathcal{L}(E)$.
1) On suppose qu'il existe un scalaire α tel que : $\mathrm{Im}(f - \alpha\ \mathrm{id}_E) \subset H$. Montrer que α est valeur propre de f et que H est stable par f.
2) Réciproquement, on suppose que H est stable par f. Prouver l'existence d'une valeur propre α telle que : $\mathrm{Im}(f - \alpha\ \mathrm{id}_E) \subset H$.

$\longrightarrow$ 1) Soit $x \in H$. Alors $f(x) - \alpha x \in Im(f - \alpha\ \mathrm{id}_E) \subset H$, et $f(x) = f(x) - \alpha x + \alpha x \in H$, puisque H s.e.v., $f(x) - \alpha x \in H$ et $x \in H$.
D'autre part, puisque $\mathrm{Im}(f - \alpha\ \mathrm{id}_E) \subset H$, et d'après le théorème du rang, on sait que $\ker(f - \alpha\ \mathrm{id}_E)$ n'est pas trivial (puisque de dimension 1), et contient au moins un vecteur non nul : α est valeur propre de f.

2) Si H est stable par f, pour tout $x \in H$, $f(x) \in H$. Soit alors $(e_i)_{i \leqslant n-1}$ une base de H, que l'on complète en base $(e_i)_{i \leqslant n}$ de E.

On écrit dans cette base l'image de e_n par f : $\exists a_1, ..., a_n, f(e_n) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} a_i e_i + a_n e_n$.

Alors $f(e_n) - a_n e_n \in H$.
Par ailleurs, pour tout x, par linéarité, on trouvera que $f(x) - a_n x \in H$ (calcul laissé en exercice !). Autrement dit, $\boxed{a_n \text{ est valeur propre de } f \text{ (utiliser la question précédente) et } \mathrm{Im}(f - \alpha\ \mathrm{id}_E) \subset H}$.

Exercice 10 : Soit E un e.v. de dimension finie et u un endomorphisme de E non colinéaire à l'identité tel que : $\mathrm{Im}(u-\mathrm{id}_E)\cap\mathrm{Im}(u+\mathrm{id}_E)=\left\{\vec{0}\right\}$. Montrer que u est diagonalisable et préciser son spectre.

$\longrightarrow$ Pour tout x, $(X-1)(X+1)(u)(x)=(u-\mathrm{id})\circ(u+\mathrm{id})(x)=(u+\mathrm{id})\circ(u-\mathrm{id})(x)\in\mathrm{Im}(u-\mathrm{id}_E)\cap\mathrm{Im}(u+\mathrm{id}_E)$, donc $(X-1)(X+1)(u)(x)=0$.

Ainsi, le polynôme $(X-1)(X+1)$, scindé à racines simples, annule u, donc u est diagonalisable. D'autres raisonnements sont bien sûr envisageables.

De plus, les valeurs propres de u sont incluses dans $\{-1,1\}$; il en existe au moins une ; et u, diagonalisable, n'étant pas colinéaire à l'identité ne peut n'avoir qu'une valeur propre : les valeurs propres de u sont donc 1 et -1.

Exercice 11 : Soit E un e.v. de dimension finie $n>0$, f et g deux endomorphismes de E.

1. Montrer que, si f et g commutent, tout sous-espace propre de f est stable par g.
2. Réciproquement, montrer que si E est somme directe de sous-espaces propres de f stables par g, alors : $g\circ f=f\circ g$.
3. On suppose que f et g ont chacun n valeurs propres distinctes. Montrer que f et g commutent si et seulement si les deux endomorphismes ont les mêmes vecteurs propres.

$\longrightarrow$
Attention, raisonnement classique, et proche des démonstrations du cours. A maîtriser. 1) Supposons que f et g commutent. Soit x dans un s.e.p. de f. Il existe λ t.q. $f(x)=\lambda x$.
Alors $f\circ(g(x))=g\circ f(x)=g(\lambda x)=\lambda g(x)$: $g(x)\in E_\lambda(f)$. Ceci étant valable pour tout λ et tout $x\in E_\lambda(f)$, $\boxed{\text{tout s.e.p. de } f \text{ est stable par } g.}$
2) Sut tout s.e.p. de f stable par g, f et g commutent (si $x\in E_\lambda(f)$, $g(f(x))=g(\lambda(x))=\lambda g(x)$ et $f(g(x))=\lambda g(x)$ puisque $g(x)\in E_\lambda(f)$). Puisque par hypothèse E est somme directe de s.e.p. de f stable par g et par linéarité, on montre que f et g commutent sur tout E.
(Pour le détail : on prend x dans E, on l'exprime dans une réunion de bases de chaque s.e.p., et on montre que $f(g(x))=g(f(x))$)
3) D'après l'énoncé, E est de dimension n. Si f et g ont n v.p. distinctes, ils sont diagonalisables. Si les vecteurs propres sont les mêmes, on montre sans difficulté la commutativité (on prend x vecteur propre de f et de g, on montre que $f(g(x))=g(f(x))$).
Inversement, supposons que f et g commutent. Soit $(e_i)_{i\leqslant n}$ une base de vecteurs propres de f.
Soit x un vecteur propre de f associé à λ. Puisque f admet n valeurs propres distinctes, $E_\lambda(f)$ est la droite vectorielle engendrée par x. Comme f et g commutent, cette droite vectorielle est stable par g, donc tout vecteur non nul de cette droite est vecteur propre de g, et en particulier x l'est.
Par symétrie du problème, tout vecteur propre de g est également vecteur propre de f.
Ainsi, $\boxed{\text{les deux endomorphismes ont les mêmes vecteurs propres.}}$

Exercice 12 : Soit u un endomorphisme d'un e.v. E et $f:\mathcal{L}(E)\to\mathcal{L}(E)$, $v\mapsto u\circ v$.

1. Justifier que f est un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$.
2. Si λ est valeur propre de f, donner une condition nécessaire et suffisante sur $\mathrm{Im}\,v$ pour que v appartienne au sous-espace propre de f associé à λ.
3. On suppose que E est de dimension finie. Montrer que u et f ont les mêmes valeurs propres.
4. Comparer les dimensions de $E_\lambda(u)$ et $E_\lambda(f)$. En déduire que u est diagonalisable si et seulement si f l'est.

$\longrightarrow$
1. Sans difficulté.

2. Soit λ v.p. de f. On suppose de plus que $v \in E_\lambda(f)$. Alors $f(v) = u \circ v = \lambda v$. Ainsi pour tout $x \in E$, $u \circ v(x) = \lambda v(x)$: tout élément non nul de l'image de v est vecteur propre de u associé à λ. Ceci étant valable pour tout x de E, il est **nécessaire** pour que v (non nul) appartienne au s.e.p. de f associé à λ que $\operatorname{Im} v \subset E_\lambda(u)$.
Inversement, si on dispose de cette inclusion, on constate que v est vecteur propre de f associé à λ : la condition énoncée est donc également suffisante.

Le raisonnement utilisé est dit **par analyse et synthèse** : si on ne vérifie pas à la fin de ce raisonnement que la condition nécessaire est également suffisante, on n'a fait que la moitié du travail.

Finalement, une condition nécessaire et suffisante sur $\operatorname{Im} v$ pour que v appartienne au s.e.p. de f associé à λ est que $\operatorname{Im} v \subset E_\lambda(u)$.

3. On a vu précédemment que si λ est v.p. de f, tout élément non nul de l'image d'un vecteur propre de f (qui est donc non nul et admet au moins un élément non nul de son image) associé à λ est vecteur propre de u associé à λ.
Les valeurs propres de f sont donc valeurs propres de u.
Inversement, soit λ valeur propre de u, et soit un vecteur propre x de u associé à λ. On observe alors p le projecteur sur la droite vectorielle engendrée par x.
Pour tout $y \in E$, $p(y)$ est vecteur propre de u associé à λ. Pour tout $y \in E$, on a donc $u \circ p(y) = \lambda p(y)$. Puisque c'est valable pour tout $y \in E$, $f(p) = u \circ p = \lambda p$. On a donc trouvé un vecteur propre de f associé à λ. Les valeurs propres de u appartiennent à l'ensmeble des valeurs propres de f.

Par double inclusion, on a montré que $\boxed{\text{les valeurs propres de } u \text{ et de } f \text{ sont les mêmes.}}$

4. Soient $\lambda_1, ..., \lambda_p$ les valeurs propres de u (avec répétition appropriée si $\dim E_\lambda(u) > 1$) et $(x_1, ..., x_p)$ une famille libre de vecteurs propres associés à ces valeurs propres. On complète cette famille en une base $(x_1, ..., x_n)$ de E.
Pour chaque i et chaque j, on définit $v_{i,j}$ comme suit :
$v_{i,j}(x_i) = x_j$, et si $x \neq x_i, v_{i,j}(x) = 0$.
La famille des $v_{i,j}$ est une base de $\mathcal{L}(E)$, et pour tout $i \leqslant p$ et tout j, $v_{i,j}$ est vecteur propre de f associé à la v.p. λ_j. Ainsi $\forall \lambda \in \operatorname{Sp}(f), \dim E_\lambda(f) = p \dim E_\lambda(u)$, avec $p = \sum \dim E_\lambda(u)$.
Un endomorphisme d'un e.v. de dimension n est diagonalisable ssi la somme des dimensions de ses s.e.p. est égale à n. Si E est de dimension $n < +\infty$, alors $\mathcal{L}(E)$ est de dimension n^2. La conclusion suit.

Exercice 13 : Déterminer les éléments propres de la matrice suivante et dire si elle est diagonalisable :

1) $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ 2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 3) $A = \begin{pmatrix} 0_p & (1) \\ (1) & (1) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), 0 < p < n$

4) $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients valent 1, puis : $B = \begin{pmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a \end{pmatrix}$

$\longrightarrow$ 1) Le polynôme caractéristique est $x^3 - 8x^2 + 20x - 16 = (x-4)(x-2)^2$. La matrice est diag. ssi ses s.e.p. sont de dimension maximale. Le s.e.p. $E_4(u)$ est une droite vectorielle (dont il faut déterminer un vecteur directeur, en posant $AX = 4X$ ou $(A - 4\mathrm{id})X = 0$).

On résoud $AX = 2X$, et on trouve que l'ensemble solution est $\mathcal{S} = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}\right)$. Cet espace est de dimension 2. On a bien $\dim E_4(A) + \dim E_2(A) = 3$: la matrice A est diagonalisable.

2) On remarque que $\dim \operatorname{Im} A = 2$. Ainsi $\dim \ker A = \dim E_0(A) = 2$ (par le théorème du rang). On

trouve que Vect $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} \subset E_3(A)$ et Vect $\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix} \subset E_{-1}(A)$.
La somme des dimensions des s.e.p. considérés est au moins égale à 4 (et vaut au plus 4). La matrice est diagonalisable. En ce qui concerne les éléments propres, il ne reste que les vecteurs propres de $E_0(A)$ à déterminer.

3) Le rang de cette matrice est 2. On trouve aisément $n-2$ vecteurs non liés du noyau de A (par exemple $\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\...\\0\end{pmatrix}$, on en trouve $n-3$ autres de la même forme.)

Au brouillon, on remarque que si $X = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\...\\x_n\end{pmatrix}$ appartient à $E_\lambda(A)$, avec $\lambda \neq 0$, $x_1 = x_2 = ... = x_p$ et$x_{p+1} = x_{p+2} = ... = x_n$.
Par ailleurs, le vecteur constitué de p 1 puis de $n-p$ 0 est vecteur propre associé à la v.p. p, et le vecteur propre constitué de p 0 puis de $n-p$ 1 est vecteur propre associé à la v.p. $n-p$.
Alors $\lambda x_1 = (n-p)x_n$ et $\lambda x_n = px_1 + (n-p)x_n$ Cette observation permet de trouver les deux valeurs propres distinctes et un vecteur propre associé à chacune.
Conclusion : Les s.e.p. sont de dimension maximale et la somme de leurs dimension vaut n : la matrice est diagonalisable.

4) La matrice A est de rang 1. On trouve $n-1$ vecteurs non liés de son noyau (voir point précédent), et le vecteur $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\...\\1\end{pmatrix}$ est vecteur propre associé à la valeur propre n. Cette matrice bien est diagonalisable.
On remarque que la matrice B satisfait $B = bA + (a-b)I$. Il existe P inversible et D diagonale, telles que $A = PDP^{-1}$. On remarque que $B = P\left(bD + (a-b)I\right)P^{-1}$. On en déduit aisément les éléments propres en fonction de ceux de A.

Exercice 14 : Soit A une matrice à coefficients réels et λ une valeur propre complexe de A. Montrer que $\overline{\lambda}$ est aussi une valeur propre de A de même multiplicité, et que les deux sous-espaces propres associés ont la même dimension.

$\longrightarrow$ On montre d'abord que si λ est racine d'un polynôme réel, alors $\overline{\lambda}$ l'est également.
Pour λ racine non réelle d'un polynôme, on peut factoriser ce polynôme par $(X-\lambda)(X-\overline{\lambda})$. Par récurrence immédiate, tout polynôme a des racines dont le conjugué est racine avec même multiplicité, ce qui répond à la première partie de la question posée par l'énoncé.
Soit maintenant $X \in E_\lambda(A)$, ce qui s'écrit $AX = \lambda X$. Il suit que $\overline{AX} = \overline{\lambda X}$, puis, puisque A est une matrice à coefficients réels, que $A\overline{X} = \overline{\lambda}.\overline{X}$. L'isomorphisme qui à une matrice associe son conjugué envoie donc le s.e.p. associé à λ vers le s.e.p. associé à $\overline{\lambda}$: ces deux s.e.p. sont ainsi de même dimension.

Exercice 15 : Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ de matrice dans la base canonique : $A = \begin{pmatrix}-1 & 2 & -1\\-3 & 4 & -3\\-4 & 4 & -4\end{pmatrix}$.
Montrer que u est diagonalisable. Déterminer un polynôme annulateur de u. Calculer $A^n, n \in \mathbb{N}$.
On définit une suite (X_n) d'éléments de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = AX_n$. Cette suite est-elle convergente ?

$\longrightarrow$ Le polynôme caractéristique de A est $x^3 + x^2 - 2x = x(x+2)(x-1)$. Puisqu'il y a trois valeurs propres distinctes, A est diagonalisable. Le polynôme caractéristique de A est un polynôme annulateur de A.

Les calculs mènent à l'expression de A suivante : $A = PDP^1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$, avec D^n de calcul aisé. On constate également qu'une récurrence immédiate mène à, pour tout n, l'expression $X_n = A^n X_0$. Un calcul de la norme de X_n permet de montrer que cette suite ne converge pas.

Exercice 16 : On veut déterminer les suites réelles $(u_n)_n$ vérifiant $(R) : \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = 3u_{n+2} - 4u_n$.
1) Montrer qu'on peut traduire le problème matriciellement sous la forme : $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = AU_n$, où $(U_n)_n$ est une suite dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
2) A est-elle diagonalisable ? trigonalisable ?
3) Montrer que A est semblable à la matrice $T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
4) Calculer les puissances de T et en déduire la forme générale des suites vérifiant la relation (R).

$\longrightarrow$
1) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
2) et 3) Son polynôme caractéristique est $x^3 - 3x^2 + 4 = (x+1)(x-2)^2$ mais $\dim E_2(A) = 1$ (tout cela se calcule en cherchant les vecteurs propres associés à 2, ce qui nous donner également). La matrice A n'est donc pas diagonalisable, en revanche elle est bien trigonalisable, puisque son polynôme caractéristique est scindé.

On arrive à l'expression de A suivante : $A = PTP^1 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 4 \\ -1 & 4 & 5 \\ 3 & -3 & -6 \end{pmatrix}$.

On peut écrire $T = D + J$ avec $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $D = \operatorname{diag}(-1, 2, 2)$.

On remarque que J et D commutent. Ainsi par la formule du binôme de Newton, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k} J^k$.

Comme $J^2 = 0$, ceci devient $T^n = D^n + nD^{n-1}J$.
On en déduit une écriture de T^n, puis, en fonction de U_0, la forme générale de U_n, et enfin, celle de u_n.

Exercice 17 : Soit $A = \begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ -I_n & 0_n \end{pmatrix}$. Calculer A^2. A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$?

Préciser les valeurs propres et les dimensions des sous-espaces propres.

$\longrightarrow$
$A^2 = -I$. Le polynôme $X^2 + 1$ annule donc A et est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$ et non scindé sur $\mathbb{R}$. La matrice A est donc diag. dans $M_{2n}(\mathbb{C})$ mais pas dans $M_{2n}(\mathbb{R})$
Dans $M_{2n}(\mathbb{C})$, les valeurs propres sont i et $-i$. Les s.e.p. étant de dimension maximale et associés à des valeurs propres conjugués, ils sont de même dimension, qui vaut donc n. (voir exercice sur les valeurs propres conjuguées).

Exercice 18 : Soit E un e.v. sur $\mathbb{C}$ de dimension finie et u un endomorphisme de E ayant une unique valeur propre λ. Déterminer le polynôme caractéristique de u. A quelle condition u est-il diagonalisable ? Justifier que $u - \lambda \mathrm{id}_E$ est nilpotent.

$\longrightarrow$ L'endomorphisme u ayant une unique v.p. est diag. ssi il est colinéaire à l'identité.

Puisque E et un $\mathbb{C}$-e.v., il existe une base de E dans laquelle u est représenté par une matrice triangulaire. Alors, dans cette même base, $u - \lambda \mathrm{id}$ est représenté par une matrice triangulaire supérieure de diagonale nulle. Une telle matrice est nilpotente ; l'endomorphisme qu'elle représente l'est également.

Exercice 19 : Soit E un e.v. sur $\mathbb{C}$ de dimension finie et u, v deux endomorphismes de E qui commutent. Justifier que u admet au moins une valeur propre. En déduire que u et v ont au moins un vecteur propre commun.

$\longrightarrow$ **Attention, raisonnement classique !**
E est un e.v. sur $\mathbb{C}$ de dimension finie, le polynôme caractéristique de u y est scindé et admet donc au moins une racine, qui est valeur propre de u.
On note λ cette racine, et on se souvient que la commutativité de u et v implique que tout s.e.p. de u est stable par v.
On peut donc considérer $v_{E_\lambda(u)}$, endomorphisme induit par v sur $E_\lambda(u)$.
Le polynôme caractéristique de $v_{E_\lambda(u)}$ est également scindé sur $\mathbb{C}$, donc v admet (comme u précédemment dans E un vecteur propre dans $E_\lambda(u)$. Ce vecteur propre est ainsi commun à u et à v, ce qui prouve $\boxed{\text{l'existence d'un vecteur commun à } u \text{ et à } v}$.
