Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

Exercice 1 : Déterminer les éléments propres des endomorphismes suivants :

1. $f : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X],\ P \mapsto P'$
2. φ tel que : $\forall f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}), \varphi(f) = f'$
3. f tel que : $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), f(M) = M + \mathrm{tr}(M)I_n$

Exercice 2 : Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe un vecteur $x_0 \in E$ tel que la famille $(x_0, u(x_0), ..., u^{n-1}(x_0))$ soit libre.
Montrer que seuls les polynômes en u commutent avec u.

Exercice 3 : Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Justifier l'existence d'un entier $p \geqslant 0$ tel que la famille $(\mathrm{id}, u, ..., u^p)$ soit liée. En déduire que u possède un polynôme annulateur non nul.

Exercice 4 : Soit $E = \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et φ l'application qui, à tout élément f de E associe la fonction $g = \varphi(f)$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(0) = f(0)$ et pour $x \neq 0$: $g(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$.
Montrer que φ est un endomorphisme de E et déterminer ses éléments propres.

Exercice 5 : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que, pour toute valeur propre $\lambda \neq 0$, on a : $E_\lambda(f) \subset \mathrm{Im}(f)$.
On suppose E de dimension finie et f diagonalisable. En déduire que : $\ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = E$.

Exercice 6 : Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ ($n \geqslant 2$) et f l'application qui, à tout $P \in E$, associe le reste dans la division euclidienne de P par $X^2 - 1$.
Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de f. f est-il diagonalisable ?

Exercice 7 : Lemme des noyaux Soient E un espace vectoriel sur un corps commutatif $\mathbb{K}$ et f un endomorphisme de E. Si $P_1, \ldots, P_n \in K[X]$ (avec "n" entier strictement positif) sont premiers entre eux deux à deux, alors les sous-espaces vectoriels $V_i = \ker(P_i(f))$ ($1 \leqslant i \leqslant n$) sont en somme directe et $\displaystyle\bigoplus_{i=1}^n V_i = \ker\left[\left(\prod_{i=1}^n P_i\right)(f)\right]$.

Exercice 8 : Soit $E = \mathcal{C}^0([-\pi,\pi],\mathbb{R})$ et u l'application qui à f dans E associe $u(f)$ définie par : $\forall x \in [-\pi,\pi], u(f)(x) = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos(x-t)f(t)dt$. Vérifier que $u \in \mathcal{L}(E)$.
Montrer que 0 est valeur propre de u.
Si λ est une valeur propre non nulle de u, montrer que $E_\lambda(u) \subset \mathrm{Vect}(\cos,\sin)$. En déduire les éventuelles valeurs propres non nulles de u et les sous-espaces propres associés.

Exercice 9 : Soit E un e.v. de dimension finie $n > 0$, H un hyperplan de E et $f \in \mathcal{L}(E)$.
1) On suppose qu'il existe un scalaire α tel que : $\mathrm{Im}(f - \alpha\ \mathrm{id}_E) \subset H$. Montrer que α est valeur propre de f et que H est stable par f.
2) Réciproquement, on suppose que H est stable par f. Prouver l'existence d'une valeur propre α telle que : $\mathrm{Im}(f - \alpha\ \mathrm{id}_E) \subset H$.

Exercice 10 : Soit E un e.v. de dimension finie et u un endomorphisme de E non colinéaire à l'identité tel que : $\mathrm{Im}(u - \mathrm{id}_E) \cap \mathrm{Im}(u + \mathrm{id}_E) = \left\{\vec{0}\right\}$. Montrer que u est diagonalisable et préciser son spectre.

Exercice 11 : Soit E un e.v. de dimension finie $n > 0$, f et g deux endomorphismes de E.

1. Montrer que, si f et g commutent, tout sous-espace propre de f est stable par g.
2. Réciproquement, montrer que si E est somme directe de sous-espaces propres de f stables par g, alors : $g \circ f = f \circ g$.
3. On suppose que f et g ont chacun n valeurs propres distinctes. Montrer que f et g commutent si et seulement si les deux endomorphismes ont les mêmes vecteurs propres.

Exercice 12 : Soit u un endomorphisme d'un e.v. E et $f : \mathcal{L}(E) \to \mathcal{L}(E)$, $v \mapsto u \circ v$.

1. Justifier que f est un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$.
2. Si λ est valeur propre de f, donner une condition nécessaire et suffisante sur $\operatorname{Im} v$ pour que v appartienne au sous-espace propre de f associé à λ.
3. On suppose que E est de dimension finie. Montrer que u et f ont les mêmes valeurs propres.
4. Comparer les dimensions de $E_\lambda(u)$ et $E_\lambda(f)$. En déduire que u est diagonalisable si et seulement si f l'est.

Exercice 13 : Déterminer les éléments propres de la matrice suivante et dire si elle est diagonalisable :

1) $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ 2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 3) $A = \begin{pmatrix} 0_p & (1) \\ (1) & (1) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), 0 < p < n$

4) $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients valent 1, puis : $B = \begin{pmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a \end{pmatrix}$

Exercice 14 : Soit A une matrice à coefficients réels et λ une valeur propre complexe de A. Montrer que $\overline{\lambda}$ est aussi une valeur propre de A de même multiplicité, et que les deux sous-espaces propres associés ont la même dimension.

Exercice 15 : Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ de matrice dans la base canonique : $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -4 & 4 & -4 \end{pmatrix}$.
Montrer que u est diagonalisable. Déterminer un polynôme annulateur de u. Calculer $A^n, n \in \mathbb{N}$.
On définit une suite (X_n) d'éléments de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = AX_n$. Cette suite est-elle convergente ?

Exercice 16 : On veut déterminer les suites réelles $(u_n)_n$ vérifiant $(R) : \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = 3u_{n+2} - 4u_n$.
1) Montrer qu'on peut traduire le problème matriciellement sous la forme : $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = AU_n$, où $(U_n)_n$ est une suite dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
2) A est-elle diagonalisable ? trigonalisable ?
3) Montrer que A est semblable à la matrice $T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
4) Calculer les puissances de T et en déduire la forme générale des suites vérifiant la relation (R).

Exercice 17 : Soit $A = \begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ -I_n & 0_n \end{pmatrix}$. Calculer A^2. A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$?

Préciser les valeurs propres et les dimensions des sous-espaces propres.

Exercice 18 : Soit E un e.v. sur $\mathbb{C}$ de dimension finie et u un endomorphisme de E ayant une unique valeur propre λ. Déterminer le polynôme caractéristique de u. A quelle condition u est-il diagonalisable ? Justifier que $u - \lambda \mathrm{id}_E$ est nilpotent.

Exercice 19 : Soit E un e.v. sur $\mathbb{C}$ de dimension finie et u, v deux endomorphismes de E qui commutent. Justifier que u admet au moins une valeur propre. En déduire que u et v ont au moins un vecteur propre commun.