

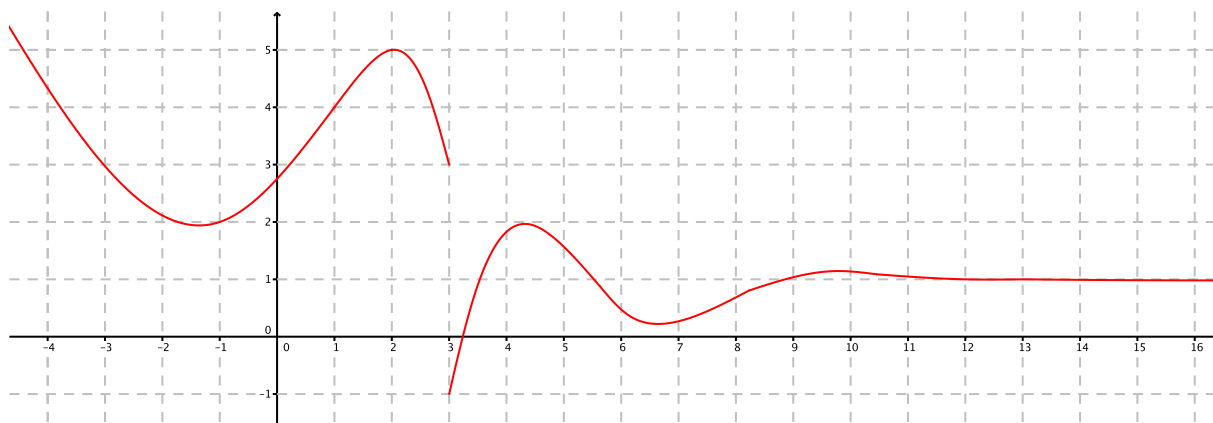
Savoirs-faire du Chapitre 10 : limites et continuité.

Comprendre les notions de limites et de continuité

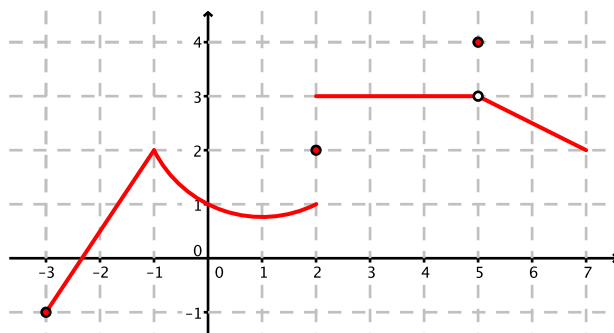
- Lire une limite sur la courbe représentative d'une fonction.
- Voir si une courbe représentative correspond à une fonction continue ou pas.
- Justifier la continuité en se référant aux fonctions de référence.

Exercice n° 1

1. Si elles existent, déterminer par lecture graphique les limites de f : en -3 , en $+\infty$, en 3 , en -1^+ , en 1 , en $-\infty$, en 3^+ .



2. Discuter la continuité de f en -3 , -1 , 2 , 5 et 7 .



Peut-on prolonger f par continuité en 7 ? en 5 ?

3. Etudier la continuité des fonctions suivantes :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \sin x & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{si } x < 0 \\ \cos x & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \quad h(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x < -1 \\ x^2 & \text{si } x \in [-1; 1] \\ 2x - 3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Travailler avec les notations mathématiques

- Démontrer une propriété.
- Appliquer les définitions pour étudier une limite, la continuité en un point.
- Calculer des limites.
- Utiliser des suites pour prouver qu'une limite n'existe pas.

Exercice n° 2

1. Montrer que si la fonction f a une limite finie en $a \in \mathbb{R}$ alors f est bornée au voisinage de a .

2. Montrer que toute fonction croissante et majorée admet une limite finie en $+\infty$.
3. Prouver que si f et g sont deux fonctions qui ont des limites en 3 alors $f + g$ et $f \times g$ ont des limites finies en 3.
4. Prouver que $x \mapsto \sin(\frac{1}{x})$ n'a pas de limite en 0^+ .
5. La fonction $f(x) = \frac{2x^2 - 4x - 30}{x^2 + 2x - 3}$ peut-elle être prolongée par continuité ?
6. Etudier les limites en $+\infty$ de $x \mapsto e^{ix}$ et $x \mapsto \frac{e^{ix}}{x}$.

Utiliser la continuité

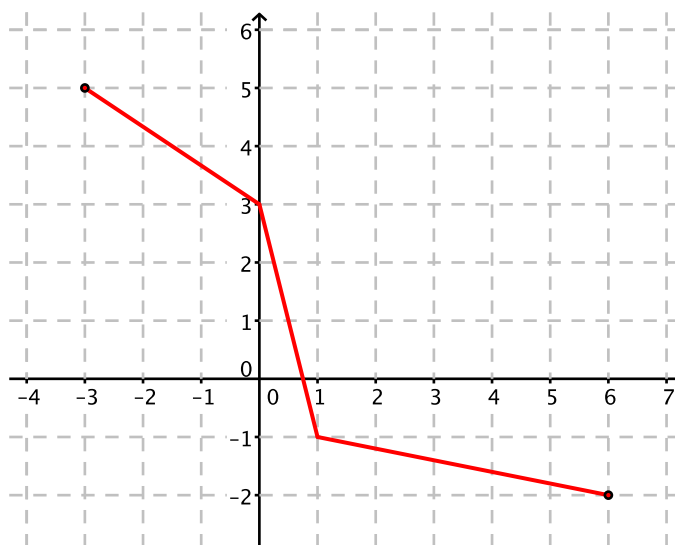
- Prouver qu'une équation admet une/des solutions à l'aide du TVI.
- Déterminer l'image d'un intervalle par une fonction continue.
- Prouver qu'une fonction est bijective.

Exercice n° 3

1. Prouver que, pour tout réel k , l'équation $2x^3 - 3x + 2 = k$ admet des solutions.
2. Préciser le nombre de solutions en fonction de k .
3. Donner l'image de $[-1; 1[$ par les fonctions $f(x) = x^3 + x$ et $g(x) = x^3 - x$.
4. Pour les fonctions suivantes, déterminer l'image de l'intervalle I proposé.

$$f_1(x) = 4x + 1, I_1 = [-3; 7[\quad ; \quad f_2(x) = x^2, I_2 = [1; 3[\quad ; \quad f_3(x) = x^2, I_3 = [-4; 1[$$

5. On considère la fonction $f(x)$ représentée ci-dessous :



Justifier qu'elle réalise une bijection entre des intervalles qu'on précisera, puis représenter la courbe de sa réciproque.

6. Trouver la plus grande valeur du réel positif a tel que $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ réalise une bijection de $]0; a]$ sur un intervalle à déterminer.