

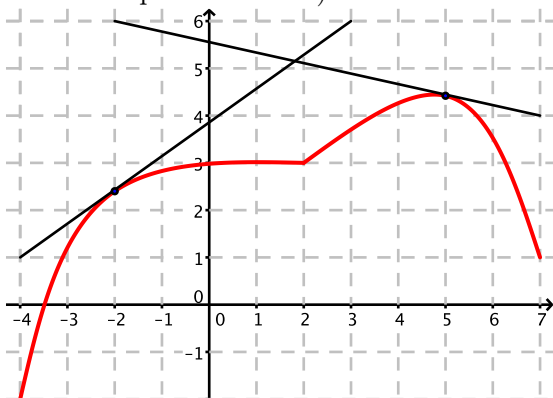
Savoirs-faire du Chapitre 12 : Dérivation et applications.

Dériver

- Manipuler les définitions.
- Comprendre l'interprétation graphique de la dérivation.
- Etudier la dérivabilité en un point.
- Calculer des dérivées par opérations.
- Calculer des dérivées d'ordre supérieur, dériver des fonctions à valeurs dans \mathbb{C} .

Exercice n° 1

1. En utilisant $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, étudier la dérivabilité de \sin sur \mathbb{R} .
(On peut prouver la limite de $\frac{\sin x}{x}$ en 0 par des considérations géométriques.)
2. Etudier la dérivabilité de $x \mapsto \frac{1}{x}$.
3. Retrouver la formule de dérivation d'un produit.
4. On considère la fonction f représentée ci-dessous. (Lorsque les valeurs lues semblent entières, on considère qu'elles le sont).



- a) Déterminer les domaines de définition et de dérivabilité de g .
- b) Lire $f(0)$, $f(-4)$, $f(7)$, $f'(-2)$ et $f'(5)$.

5. Après avoir justifié de sa dérivabilité sur \mathbb{R} , déterminer la fonction dérivée de $x \mapsto (x^2 + 1)^{\cos x}$.
6. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Après avoir justifié que $x \mapsto x^\alpha$ est définie et de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}^{+*} , déterminer sa dérivée d'ordre n ($n \in \mathbb{N}$).
7. La fonction $x \mapsto x^x$ peut-elle être prolongée en une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} ?
8. La fonction $x \mapsto x^3 \sin \frac{1}{x}$ peut-elle être prolongée en une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} ?

Utiliser les dérivées

- Etudier des variations.
- Trouver des extrema.
- Approcher localement une fonction à l'aide d'un DL1.
- Appliquer le théorème de Rolle, le TAF.
- Trouver des inégalités à l'aide des IAF.

Exercice n° 2

1. Déterminer les extrema de $f(x) = x^4 - x^3 + 1$ sur $[-1; 1]$.
2. Donner le DL1 de $x \mapsto \sqrt{x}$ en 4. En déduire une valeur approchée de $\sqrt{3,96}$.
3. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $n > 1$ un entier et $P_n(x) = x^n + ax + b$.
En utilisant le théorème de Rolle, prouver que P admet au maximum trois racines réelles.

4. Soit $f \in \mathcal{C}^3([0; 1])$ et qui vérifie $f(0) = f'(0) = f(1) = f'(1) = 0$. Prouver qu'il existe $\alpha \in]0; 1[$ tel que $f^{(3)}(\alpha) = 0$.
5. Prouver qu'une fonction dérivable dont la dérivée est positive sur un intervalle est croissante sur cet intervalle.
6. Soit f une fonction définie et dérivable sur \mathbb{R} qui vérifie $f(3) = 5$ et $|f'| < 2$. Donner un encadrement pour $f(0)$.
7. Prouver que, pour tout $x > 0$, on a : $\frac{1}{x+1} \leq \ln(x+1) - \ln x \leq \frac{1}{x}$.