

# Savoirs-faire du Chapitre 11 : Systèmes Linéaires.

## Matrices

- Manipuler le double indiçage, comprendre les notations et le vocabulaire.
- Faire des opérations sur les matrices, en particulier le produit par une colonne.

### Exercice n° 1

---

- Soit  $p$  un entier naturel non nul. On considère la matrice  $M_p$  de taille  $(3, p)$  telle que :
  - sur la première ligne : les coefficients sont égaux à 1
  - sur la 2<sup>e</sup> ligne : les coefficients sont égaux à l'indice de leur colonne
  - sur la 3<sup>e</sup> ligne : les coefficients sont égaux à la somme des coefficients situés au-dessus dans la même colonne
- a) Ecrire  $M_4$ .
- b) On décide d'appeler les coefficients de  $M$  :  $m_{i,j}$ . Exprimer  $m_{i,j}$  en fonction de  $i$  et  $j$ .
2. On considère  $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  telle que  $\forall (i, j) \in \llbracket 1; 3 \rrbracket \times \llbracket 1; 3 \rrbracket$ ,  $a_{i,j} = i^j$ . Ecrire  $A$ .
3. Effectuer les calculs suivants :

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 4 & -5 & 6 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} -4 & 1 & 6 \\ 8 & 0 & -3 \\ 5 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

4. Soit  $A$  une matrice. Existe-t-il une colonne  $B$  (indépendante de  $A$ ) telle que  $AB$  soit une colonne égale à la somme de toutes les colonnes d'indice pairs de  $A$  ?
5. Soit  $A$  une matrice. Existe-t-il une colonne  $C$  (indépendante de  $A$ ) telle que  $AC$  soit une colonne dont chaque coefficient est la moyenne des coefficients de la ligne de  $A$  correspondante ?
6. Soit  $A$  une matrice. Existe-t-il une colonne  $D$  (indépendante de  $A$ ) telle que  $AD$  soit une colonne dont chaque coefficient est le maximum des coefficients de la ligne de  $A$  correspondante ?

## Systèmes linéaires

- Reconnaître un système linéaire, un système linéaire homogène.
- Associer une matrice, une matrice augmentée, à un système linéaire.
- Appliquer l'algorithme de Gauss pour échelonner puis réduire une matrice/une matrice augmentée/un système.
- Résoudre un système.

### Exercice n° 2

---

1. Les systèmes suivants sont-ils linéaires ?

$$(\mathcal{S}_1) : \begin{cases} 3x - 5y + z = 2 \\ x - 4z = \pi \end{cases} \quad (\mathcal{S}_2) : \begin{cases} 4x - y - 1 = 0 \\ 2xy + 3 = 0 \\ y = 5 \end{cases} \quad (\mathcal{S}_3) : \begin{cases} 5x - y = 3 \\ z + x - 9 = 0 \\ 2 - y + z = 5 \end{cases}$$

2. Pour chaque système linéaire de la question 1, donner la matrice et la matrice augmentée.

3. Echelonner puis réduire les matrices  $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 6 & 0 & -4 \\ 5 & -2 & 2 \end{pmatrix}$  et  $C = \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 3 & 5 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ .

### Exercice n° 3

---

On considère le système  $(\mathcal{S}) : \begin{cases} 3x - 4y + z = 4 \\ 2x + y - z = 8 \\ 5x + z = 3 \end{cases}.$

- Donner la matrice  $A$  du système  $(\mathcal{S})$ , puis sa matrice  $(A|B)$ .
- Trouver une suite d'opérations élémentaires sur les lignes qui permette de passer de  $A$  à une matrice échelonnée et réduite.
- Appliquer la même suite d'opérations élémentaires à  $(A|B)$ , ainsi qu'à  $(\mathcal{S})$ .
- Résoudre  $(\mathcal{S})$ .

### Vecteurs de $\mathbb{R}^n$

- Comprendre et manipuler les définitions.
- Décider si une famille de vecteurs est libre ou liée.
- Décider si une famille de vecteurs est génératrice ou non.

### Exercice n° 4

---

- Prouver qu'une famille de vecteurs qui contient le vecteur nul est liée. La réciproque est-elle vraie ?
- La famille  $\left( \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 13 \end{pmatrix} \right)$  est-elle libre ou liée ? Est-elle génératrice de  $\mathbb{R}^2$  ?
- La famille  $\left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 9 \end{pmatrix} \right)$  est-elle libre ou liée ? Est-elle génératrice de  $\mathbb{R}^3$  ?