Savoirs-faire et exercices du Chapitre 12 : Arithmétique des entiers.

Savoirs-faire

— Connaître les définitions.
— Déterminer la décomposition en produit de facteurs premiers de « petits » entiers.
— Déterminer un PGCD à l'aide de la décomposition en produit de facteurs premiers ou grace à l'algorithme d'Euclide.
— Déterminer un PPCM à l'aide de la décomposition en produit de facteurs premiers ou en se servant du PGCD.

Exercice n° 1

1. Donner l'ensemble des diviseurs de 50, l'ensemble des diviseurs de 12 puis $50 \wedge 12$.
2. Donner l'ensemble des mulitples de 12, l'ensemble des mulitples de 50 puis $12 \vee 50$.
3. Donner la décomposition en produit de facteurs premiers de 728 et de 500.
   En déduire $728 \wedge 500$ ainsi que $728 \vee 500$.
4. Calculer $9831 \wedge 2741$ ainsi que $9831 \vee 2741$.

Exercices

Vrai ou Faux ? Dans toutes les proposition, a, b, c, d désignent des entiers, n un entier non nul.

i. Il existe des entiers ayant exactement n diviseurs.
ii. Si $a|b$ alors $a \wedge b = a$.
iii. Il y a un lien logique entre $a|b$ et $a \leq b$.
iv. Deux nombres pairs ne peuvent pas être premiers entre eux.
v. Si $a \not| b$ et $b \not| a$ alors a et b sont premiers entre eux.
vi. Si les n premiers nombres premiers sont $p_1, \ldots p_n$ alors $p_1 \times \ldots p_n + 1$ est premier.
vii. Si $a|c$ et $b|c$ alors $ab|c$.
viii. Deux nombres premiers sont premiers entre eux.
ix. Si $d = a \wedge b = b \wedge c$ alors $d = a \wedge c$.

Exercice n° 2

a) Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0; 1\}$. Démontrer qu'aucun entier de $[\![n! + 2; n! + n]\!]$ n'est premier.
b) En déduire un intervalle d'entiers de longueur n qui ne contient aucun nombre premier.

Exercice n° 3

Appliquer l'algorithme d'Euclide pour prouver que 700 et 143 sont premiers entre eux. En déduire des entiers u et v tels que $700u + 143v = 1$.

Exercice n° 4

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $n + 1$ et $2n + 1$ sont premiers entre eux.

Exercice n° 5

En considérant les restes dans la division euclidienne par 9, montrer que si a, b, c sont des entiers qui vérifient $a^3 + b^3 = c^3$ alors, un au moins de ces entiers, est un multiple de 3.

Exercice n° 6

Soit $n \geq 2$ Démontrer que la somme de n entiers impairs consécutifs n'est pas un nombre premier.

Exercice n° 7

Programmer en Python une fonction qui prend en entrée un entier naturel n et renvoie `True` si n est premier, `False` sinon.

Exercice n° 8

Programmer en Python une fonction qui prend en entrée un entier naturel n et renvoie la liste (par ordre croissant) des nombres premiers qui sont inférieurs à n.

Exercices plus difficiles (qui ne seront pas corrigés en classe)

Exercice n° 9

a) Justifier que tout nombre premier $p > 2$ est de la forme $4k+1$ ou $4k+3$ avec $k \in \mathbb{N}$.

b) Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, si $p_1, \ldots p_n$ désignent les n premiers nombres premiers alors $1 + \prod_{i=1}^{n} p_i$ est de la forme $4k+3$ avec $k \in \mathbb{N}$.

c) En déduire qu'il existe une infinité de nombres premiers de la forme $4k+3$ avec $k \in \mathbb{N}$

Exercice n° 10

Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ l'équation $a^2 - b^2 = a \wedge b + 2$.