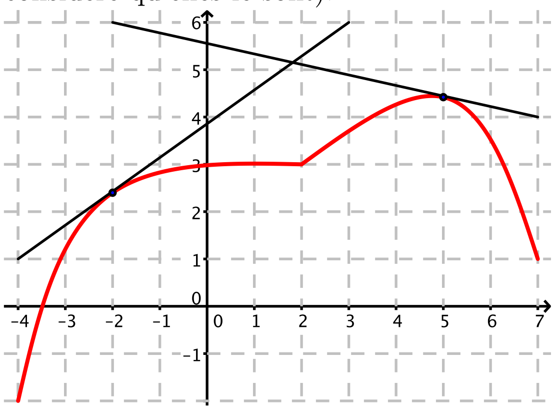
Savoirs-faire du Chapitre 12 : Dérivation et applications.

Dériver

— Manipuler les définitions.
— Comprendre l'interprétation graphique de la dérivation.
— Etudier la dérivabilité en un point.
— Calculer des dérivées par opérations.
— Calculer des dérivées d'ordre supérieur, dériver des fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Exercice n° 1

1. En utilisant $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$, étudier la dérivabilité de sin sur $\mathbb{R}$.
   (On peut prouver la limite de $\frac{\sin x}{x}$ en 0 par des considérations géométriques.)
2. Etudier la dérivabilité de $x \longmapsto \frac{1}{x}$.
3. Retrouver la formule de dérivation d'un produit.
4. On considère la fonction f représentée ci-dessous. (Lorsque les valeurs lues semblent entières, on considère qu'elles le sont).



   a) Déterminer les domaines de définition et de dérivabilité de g.
   b) Lire $f(0)$, $f(-4)$, $f(7)$, $f'(-2)$ et $f'(5)$.
5. Après avoir justifié de sa dérivabilité sur $\mathbb{R}$, déterminer la fonction dérivée de $x \mapsto (x^2+1)^{\cos x}$.
6. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Après avoir justifié que $x \mapsto x^\alpha$ est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+*}$, déterminer sa dérivée d'ordre n ($n \in \mathbb{N}$).
7. La fonction $x \mapsto x^x$ peut-elle être prolongée en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$?
8. La fonction $x \mapsto x^3 \sin \frac{1}{x}$ peut-elle être prolongée en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$?

Utiliser les dérivées

— Etudier des variations.
— Trouver des extrema.
— Approcher localement une fonction à l'aide d'un DL1.
— Appliquer le théorème de Rolle, le TAF.
— Trouver des inégalités à l'aide des IAF.

Exercice n° 2

1. Déterminer les extrema de $f(x) = x^4 - x^3 + 1$ sur $[-1; 1]$.
2. Donner le DL1 de $x \mapsto \sqrt{x}$ en 4. En déduire une valeur approchée de $\sqrt{3,96}$.
3. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $n > 1$ un entier et $P_n(x) = x^n + ax + b$.
   En utilisant le théorème de Rolle, prouver que P admet au maximum trois racines réelles.

4. Soit $f \in \mathcal{C}^3([0;1])$ et qui vérifie $f(0) = f'(0) = f(1) = f'(1) = 0$. Prouver qu'il existe $\alpha \in]0;1[$ tel que $f^{(3)}(\alpha) = 0$.œ
5. Prouver qu'une fonction dérivable dont la dérivée est positive sur un intervalle est croissante sur cet intervalle.
6. Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ qui vérifie $f(3) = 5$ et $|f'| < 2$. Donner un encadrement pour $f(0)$.
7. Prouver que, pour tout $x > 0$, on a : $\dfrac{1}{x+1} \leq \ln(x+1) - \ln x \leq \dfrac{1}{x}$.