Savoirs-faire et exercices du Chapitre 13 : Dénombrement.

Savoirs-faire

— Connaître les définitions. En particulier, ne pas confondre une combinaison et un arrangement.
— Traduire du langage courant en termes d'ensembles et de dénombrement. En particulier, savoir si l'ordre importe ou pas. Comprendre qu'on fait une modélisation et qu'il y a parfois plusieurs façons de modéliser.

Exercice n° 1

1. On lance un dé jusqu'à obtenir 6. Le résultat de l'expérience est le nombre de lancé. Quel est l'ensemble des résultats possibles ?
2. On lance un dé jusqu'à obtenir 6. Le résultat de l'expérience est le plus petit résultat obtenu. Quel est l'ensemble des résultats possibles ?
3. On lance un dé jusqu'à obtenir 6. Le résultat de l'expérience est le plus grand résultat obtenu. Quel est l'ensemble des résultats possibles ?
4. On lance un dé jusqu'à obtenir 6. Le résultat de l'expérience est la moyenne des résultats obtenus avant le 6. Quel est l'ensemble des résultats possibles ?
5. Dans la classe de PCSI, on note le nom du premier élève à arriver dans la classe le matin. Combien y a-t-il de résultats possibles ?
6. Dans la classe de PCSI, cinq matins de suite, on note le nom du premier élève à arriver dans la classe. Combien y a-t-il de résultats possibles ?
7. Dans la classe de PCSI on note par ordre d'arrivée les noms des cinq premiers élèves à arriver dans la classe le matin. Combien y a-t-il de résultats possibles ?
8. Dans la classe de PCSI on note les noms des cinq premiers élèves à arriver dans la classe le matin. Combien y a-t-il de résultats possibles ?

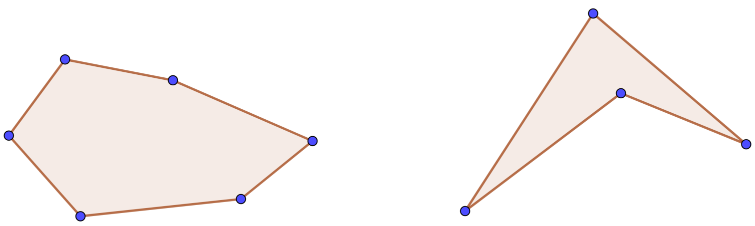
Exercices

Vrai ou Faux ? Dans toutes les propositions, n désigne un entier naturel non nul.

i. S'il existe une bijection entre les ensembles A et B et si $A \subset B$ alors $A = B$.
ii. Soit A un ensemble de cardinal n et $\varphi : A \to A$ est une injection. Alors φ est une bijection.
iii. Soit A est un ensemble de cardinal n et $\varphi : A \to A$ est une surjection. Alors φ est une bijection.
iv. Il existe un ensemble ayant exactement n éléments.
v. Il existe un ensemble ayant exactement n parties.
vi. Dans le triangle de Pascal, la somme des coefficients des lignes double à chaque ligne.

Exercice n° 2

Un polygône est dit *convexe* lorsque, pour tout couple de points A et B pris sur les bords du polygône, le segment $[AB]$ est inclus dans le polygône. Ci-dessous, un polygône convexe et un polygône non-convexe :



Existe-t-il des polygônes convexes possédant autant de *diagonales* que de sommets ?

Exercice n° 3

Un glacier propose six parfums de glace. On peut acheter des cornets à une, deux ou trois boules. Combien de cornets différents est-il possible de composer ?

Exercice n° 4

1. Combien existe-t-il de parties de $[\![1;23]\!]$ qui contiennent exactement un élément de $[\![1;6]\!]$? Même question avec « au moins un élément ».
2. Reprendre la question précédente avec n et p à la place de 23 et 6.

Exercice n° 5

Soit E un ensemble fini de cardinal $n > 0$. Montrer que le nombre de triplets de parties (A, B, C) de E qui vérifient $A \cup B \cup C = E$ est 7^n.

Exercice n° 6

Soit E un ensemble fini. Combien y a-t-il de couples de parties (A, B) de E qui vérifient $A \subset B$?

Exercice n° 7

1. Soit n, m, p des entiers naturels tels que $p \leq \min(n, m)$. Démontrer la formule de Vandermonde :
$$\binom{n+m}{p} = \sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k}\binom{m}{p-k}$$
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $\displaystyle\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

Plus difficile

Exercice n° 8

Une classe de PCSI comptant 20 élèves, 10 garçons et 10 filles, part en sortie.

1. Le car comporte 30 places. De combien de façons les élèves peuvent occuper le car ?
2. Le repas est organisé sur une circulaire ayant exactement 20 places. Combien de plans de table peut-on faire ?
3. Même question si on demande une alternance fille-garçon.