Savoirs-faire du Chapitre 14 : Matrices.

Calculer dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

— Calculer des combinaisons linéaires.
— Connaître les notations et le vocabulaire spécifique (matrice identité, symbole de Kronecker...)
— Savoir si deux matrices A et B ont des formats compatibles pour que AB existe.
— Calculer un produit matriciel.
— Savoir que le produit matriciel a des points communs avec le produit dans $\mathbb{K}$, mais aussi des différences fondamentales : il n'est pas commutatif, il n'est pas intègre.
— Calculer des puissances de matrices carrées.

Exercice n° 1

1. Calculer $3I_3 - 2\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Exprimer le résultat à l'aide du symbole de Kronecker.
2. Donner la base canonique de $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$. Exprimer chaque matrice à l'aide du symbole de Kronecker.
3. Effectuer les produits de matrices :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 1 & b & b \\ 1 & c & a \end{pmatrix}$$

4. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer une expression de A^n en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$.
5. Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer une expression de B^n en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$.

Inverse d'une matrice carrée

— Comprendre le lien entre matrices et systèmes linéaires.
— Comprendre le lien entre opérations sur les lignes et matrices élémentaires.
— Décider si une matrice carrée est inversible.
— Déterminer l'inverse d'une matrice carrée inversible.
— Savoir traiter rapidement le cas d'une matrice carrée 2×2.

Exercice n° 2

1. Trouver les solutions du système : $\begin{cases} 3x + 2z = 0 \\ 3y + z + 3t = 0 \\ x + y + z + t = 0 \\ 2x - y + z - t = 0 \end{cases}$.
   (On exprimera la solution sous forme d'un Vect).
2. Déterminer les inverses des matrices élémentaires.
3. Déterminer la matrice B par laquelle il faut multiplier à droite une matrice de $\mathcal{M}_{2,4}(\mathbb{K})$ pour permuter ses deux dernières colonnes.
4. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $A^3 - A$. En déduire que A est inversible puis déterminer A^{-1}.

5. Déterminer si les matrices suivantes sont inversibles ou pas *(on ne demande pas de déterminer les inverses).*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ 0 & & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & \bar{\alpha} & \bar{\alpha}^2 \\ \alpha & 1 & \bar{\alpha} \\ \alpha^2 & \alpha & 1 \end{pmatrix} (\alpha \in \mathbb{C})$$

6. Justifier que $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ est inversible et donner son inverse.

7. Déterminer l'inverse de $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -3 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.