Savoirs-faire du Chapitre 15 : Analyse asymptotique.

Comparaison des suites, comparaison des fonctions

— Manipuler les définitions.
— Comprendre qu'un petit o est un niveau de précision.
— Trouver un équivalent simple

Exercice n° 1

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels. Que siginifie $u_n = O(1)$?
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels. Que siginifie $u_n = o(1)$ sur le comportement asymptotique de u ?
3. Compléter de la façon la plus simple possible les expressions suivantes :
$O(n^2) + 3n^3 + O(n) + O(\frac{1}{n}) = O(\dots)$; $o(n) + o(n^2) + o(n^3) = o(\dots)$
4. Donner l'équivalent simple de $f(x) = x^2 + 5x + \mathrm{e}^{-2x}$ en $+\infty$, puis en 0.
5. Donner un équivalent le plus simple possible de $\cos(\sin x)$ en 0.
6. Prouver que $n^2 \sim n^2 + n$. A-t-on $\exp(n^2) \sim \exp(n^2 + n)$?
7. Donner un exemple qui illustre que l'équivalence n'est pas compatible avec l'addition.

On a vu que :
- $O(1)$ et $o(1)$ signifient réspectivement « borné » et « tend vers 0 ».
(pour une suite, ou pour une fonction en a) ;
- on peut avoir plusieurs équivalents qui correspondent à des niveaux de précision différents ; il faudra adapter selon l'usage qu'on en aura.

On a illustré avec des exemples que :
- on ne compose pas les équivalents ;
- on n'additionne pas les équivalents ;

Développements limités : les obtenir

— Manipuler les définitions.
— Connaître les développements limités de référence.
— Déterminer un DL par opérations sur les DL de référence.
— Obtenir le DL d'un quotient en se servant des DL de $\frac{1}{1+x}$ et $\frac{1}{1-x}$.
— Obtenir un DL par dérivation ou primitivation.

Exercice n° 2

1. Justifier que $\mathrm{e}^x \underset{0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^3 + o(x^2)$. Est-ce le développement limité de e^x en 0 ?
2. Prouver que si la fonction f admet un $DL_n(a)$ alors, pour tout $p \leq n$, f admet un $DL_p(a)$.
3. Donner le $DL_5(0)$ de sh. Justifier comment on peut gagner gratuitement un ordre.
4. Utiliser la formule de Taylor-Young pour donner un $DL_3(1)$ de $x \mapsto \mathrm{e}^{(x^2)}$. Retrouver ce résultat par opérations.
5. Calculer le $DL_5(0)$ de th de deux façons différentes.
6. Rappeler le $DL_n(0)$ de $\frac{1}{1+x}$, en déduire celui de $\frac{1}{1+x^2}$ puis celui de Arctan x.

Développement limités : s'en servir

— Pour trouver une limite.
— Pour prouver qu'une fonction est prolongeable par continuité, voire que le prolongement est dérivable et $\mathcal{C}^1$.
— Pour étudier un comportement local : tangente, position par rapport à la tangente...
— Pour étudier un comportement asymptotique : asymptote, position par rapport à l'asymptote...

Remarque : un comportement asymptotique est un comportement local au voisinage de $+\infty$ ou $-\infty$.

Exercice n° 3

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} (1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$.
2. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^{\sin x}}{1+\cos x}$.
3. Justifier que $x \longmapsto \frac{\sin x}{x}$ se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Préciser l'image de 0 et le nombre dérivé en 0.
4. Déterminer l'équation de la tangente à $y = \sqrt[3]{1+x}$ au point d'abscisse 0. Préciser les positions relatives des deux courbes.
5. Donner l'asymptote de $y = \sqrt{x^2 - x + 3}$ au voisinage de $+\infty$. Préciser les positions relatives des deux courbes.

Remarque : la fonction $x \longmapsto \frac{\sin x}{x}$ s'appelle *sinus cardinal*. Elle est en fait de classe $\mathcal{C}^\infty$ mais il faut des arguments plus sophistiqués que les DL pour le prouver.

À retenir :
- il est plus facile d'obtenir des DL par opérations avec les DL de référence plutôt que d'appliquer la formule de Taylor.
- Les DL permettent de lever des formes indéterminées (mais toutes les limites n'en sont pas).