Savoirs-faire du Chapitre 17 : Espaces Vectoriels.

Espaces et sous-espaces vectoriels

— Manipuler les définitions pour raisonner en toute généralité.
— Prouver qu'un ensemble est muni d'une structure d'espace vectoriel.
— Connaître les exemples de référence.
— Décider si une partie d'un espace vectoriel est un sous-espace vectoriel ou non.
— Lorsque c'est possible, exprimer un sous-espace comme un Vect.

Exercice n° 1

1. Soit E un espace vectoriel. Prouver que $\vec{0}$ est dans tout sous-espace vectoriel de E.
2. Donner un exemple d'une partie de $\mathbb{K}[X]$ qui ne soit pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.
3. L'ensemble $\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} / f(0) = 1\}$ est-il un espace vectoriel ?
4. L'ensemble $\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} / f(3) = 0\}$ est-il un espace vectoriel ?
5. L'ensemble $\{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / u_n = o(n)\}$ est-il un espace vectoriel ?
6. L'ensemble $\{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / u_n \sim n\}$ est-il un espace vectoriel ?
7. On travaille dans $\mathbb{R}^3$. On considère l'ensemble $\Gamma = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - 2y + z = 0\big\}$.
   Prouver que Γ est un plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
8. On poursuit la question précédente. Trouver un supplémentaire de Γ dans $\mathbb{R}^3$.

Familles finies de vecteurs

— Manipuler les définitions pour raisonner en toute généralité.
— Connaître les bases canoniques des espaces de référence ; comprendre qu'elles fournissent naturellement des familles génératrices.
— Construire un supplémentaire pour un sous-espace donné.

Exercice n° 2

1. Prouver qu'une famille de vecteurs contenant $\vec{0}$ est liée. Etudier la réciproque.
2. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $\mathcal{F}$ une famille finie (et non vide) de vecteurs de E. Expliciter chaque élément de la phrase ci-dessous :
   $\mathcal{F}$ est liée si, et seulement si, un des vecteurs de $\mathcal{F}$ peut d'écrire comme combinaison linéaire des autres vecteurs de E.
3. Prouver la phrase ci-dessus.
4. Prouver que la famille $(X^3 + X^2, X^2 - 5X + 2, X + 1, 5)$ est une base de $\mathbb{K}_3[X]$.
5. Donner deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{K}_3[X]$.
6. Montrer que $\mathbb{K}^3 = \{(x; 2x; 3x)/x \in \mathbb{K}\} \oplus \{(x + y; x - y; y)/(x; y) \in \mathbb{K}^2\}$.
7. Montrer que l'ensemble T des matrices triangulaires supérieures est un sous-espace de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
   En donner une base puis un supplémentaire.
8. Prouver que $F = \{P \in \mathbb{K}[X]/P(0) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.
9. On poursuit la question précédente. Déterminer un supplémentaire de F.