

Savoirs-faire du Chapitre 2 : Autour des fonctions

Applications

- Maîtriser le vocabulaire (surjectif, injectif, bijectif, composée et combinaison linéaire, ...).
- Connaître les définitions et savoir les manipuler pour démontrer des résultats.
- Créer des exemples simples, à l'aide de diagrammes.
- Déterminer des images directes et des images réciproques.

Exercice n° 1

1. Montrer que si $f : A \rightarrow B$ et $g : B \rightarrow C$ sont injectives alors $g \circ f$ l'est également.
 2. Donner un exemple d'une application surjective mais pas injective.
 3. Déterminer $\sin([0; 1])$ et $\cos^{-1}(\mathbb{Z})$.
-

Généralités sur les fonctions

- Déterminer le domaine de définition d'une fonction définie par une expression algébrique.
- Dédire la courbe de $g(x)$ à partir de celle de $f(x)$ lorsque le lien entre les expressions algébriques est simple.
- Appliquer les définitions pour étudier les variations.
- Utiliser le théorème de la bijection.
- Décider si une fonction est paire, impaire, périodique ou aucun des trois.
- Faire l'étude complète d'une fonction.

Exercice n° 2

1. Déterminer le domaine de définition de $f(x) = \ln(\sin x)$.
 2. À main levée, dessiner l'allure de $y = \cos(2x) - 1$.
 3. Etudier les variations de $x \mapsto x^2$; de $x \mapsto \sqrt{x}$.
 4. Justifier que $f(x) = x - \ln x$ réalise une bijection de $]0; 1]$ vers un ensemble que l'on précisera.
 5. Etudier la parité de $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, puis en faire l'étude.
-

Dérivation des fonctions

- Utiliser la définition du nombre dérivé.
- Trouver une équation de tangente, réciproquement lire le nombre dérivé.
- Calculer une dérivée à l'aide des formules sur les opérations.
- Etudier des variations, trouver des extrema.

Exercice n° 3

1. Montrer que $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur \mathbb{R}^{+*} et déterminer sa fonction dérivée.
2. Retrouver les formules vues en terminale : $(\ln u)'$, $(e^u)'$, $(\sqrt{u})'$, $\frac{d}{dx}(\cos(ax + b))$.
(On précisera les conditions pour u)
3. Trouver toutes les tangentes de $y = \ln x$ qui passent par le point $A(0; 1)$.
4. Sans s'occuper de la dérivabilité, dériver $f(x) = \ln(x^2 \sin x + \sqrt{x})$.
5. Montrer que $f(x) = \frac{3+x}{1+x^2}$ admet un maximum que l'on précisera.

Fonctions de référence

- Dessiner l'allure de chacune des fonctions de référence vues : trigonométriques (et réciproques), exp, ln.
- Utiliser des formules liées à ces fonctions : formules de trigonométrie, dérivées des fonctions trigonométriques réciproques, règles de calcul avec exp et ln.

Exercice n° 4

1. Prouver que, lorsque les expressions sont bien définies, on a $\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$.
En déduire une formule pour $\tan 2a$.
 2. Calculer (à la main) : $\cos(\arccos(\frac{1}{2}))$; $\arccos(\cos(\frac{5\pi}{4}))$; $\arccos(\cos(-\frac{\pi}{6}))$.
 3. Prouver que, lorsque les expressions sont bien définies, on a : $\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^{\beta}\alpha^{\gamma}$.
 4. Dériver $t \mapsto \arctan(t^2)$.
 5. Soit $a > 0$. Faire l'étude complète de $x \mapsto a^x$.
 6. Soit $b \in \mathbb{R}$. Faire l'étude complète de $x \mapsto x^b$.
-