Savoirs-faire du Chapitre 4 : Vers les équations différentielles.

Primitives

— Connaître les primitives usuelles.
— Reconnaître une primitive avec une composée.
— Trouver une primitive en utilisant une intégrale.

Exercice n° 1

1. Recopier et compléter le tableau, en précisant les intervalles sur lesquels on travaille.

fonction $f(x) =$	$\cos x$	$\sin x$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\frac{1}{\sqrt{x}}$
primitive $F(x) =$					

2. Recopier et compléter le tableau, en précisant les conditions éventuellement recquises pour u (n désigne un entier naturel).

fonction $f =$	uu'	$u'u^n$	$\frac{u'}{u}$	$\frac{u'}{u^2}$	$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$u'\sin(u)$
primitive $F =$						

3. Résoudre les équations différentielles suivantes en précisant sur quel intervalle on travaille :

$$\begin{array}{lll} (E_1) : y' = 2x + e^x & (E_2) : y' = \frac{1-x}{x^2} & (E_3) : 7y' - \frac{1}{\sqrt{x}} = 3 \\ (E_4) : y' = t - t^2 + t^6 & (E_5) : y' = (5x+2)^7 & (E_6) : y' = \tan x \end{array}$$

4. À l'aide d'une intégration par parties, trouver une expression de la primitive de ln qui s'annule en 1.

Calculer des intégrales

— Interpréter l'intégrale comme une surface (lorsque les bornes sont dans le « bon sens », sinon s'y ramener).
— Calculer une intégrale à l'aide d'une primitive.
— Calculer une intégrale en faisant une IPP ou bien un changement de variable.

Exercice n° 2

1. Justifier que $\displaystyle\int_e^1 x^2 \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x < 0$.
2. Calculer les intégrales suivantes : $\displaystyle\int_{-2}^1 3x^2 - x + 1 \, \mathrm{d}x \quad ; \quad \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos(2t + \frac{\pi}{2}) \, \mathrm{d}t \quad ; \quad \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$.
3. Calculer $\displaystyle\int_0^\pi x\cos x \, \mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^\pi x^2 \cos x \, \mathrm{d}x$.
4. À l'aide d'un changement de variable, calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{ch}x}$.

Equations différentielles

- Maîtriser le vocabulaire et reconnaître une équation différentielle linéaire du premier ordre.
- Résoudre l'équation homogène.
- Trouver une solution particulière (qui ressemble au second membre ou bien avec la méthode de la variation de la constante).
- Donner la solution générale de l'équation complète.
- Utiliser les conditions initiales pour fixer la valeur du paramètre.

Exercice n° 3

1. Donner l'ordre des équations différentielles suivantes, dire si elles sont linéaires ou non.

$$x^2y' = 3y - \mathrm{e}^t \quad ; \quad (y - y')(2y + 1) = t \quad ; \quad \cos(t)y'' = y - 1 \quad ; \quad y'' = -y$$

2. Résoudre $y' = \sqrt{x}y$ et $y' \cos x - y = 0$.
3. Résoudre les équations différentielles suivantes :

$$y' - 5y = t + 3 \quad ; \quad 2y' + y = \mathrm{e}^{7t+1} \quad ; \quad y' + y = \sin 3t$$

4. Résoudre l'équation différentielle $(1 + x^2)y' + xy = \sqrt{1 + x^2}$. Parmi ses solutions, quelle est celle qui vérifie $y(0) = 7$?