Savoirs-faire du Chapitre 5 : Calculs Algébriques.

Manipuler les symboles

- Ecrire une somme avec un $\sum$, un produit avec un $\prod$.
- Réciproquement, écrire un $\sum$ ou un $\prod$ avec des points de suspension.
- Comprendre à quoi correspond un indiçage double.
- Faire un changement d'indice.
- Déterminer le complémentaire d'une union d'ensembles, d'une intersection d'ensembles.

Exercice n° 1

1. Ecrire à l'aide d'un $\sum$ la somme des diviseurs de 4702.
2. Ecrire à l'aide d'un $\prod$ le produit des racines carrées des entiers impairs inférieurs à 1000.
3. Combien y a-t-il de termes dans la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{15} 2^{3k+1}$
4. Soit n un entier naturel non nul. Combien y a-t-il de couples (i,j) tels que $1 \leq i,j \leq n$? Tels que $1 \leq i \leq j \leq n$? Tels que $1 \leq i < j \leq n$?
5. Ce changement d'indice est-il correct : $\displaystyle\sum_{k=1}^{15} 2^{3k+1} = \sum_{i=1}^{46} 2^i$?
6. Soit Ω un ensemble ; A et B deux parties de Ω.
   Sur un diagramme de Venn, représenter $\overline{A \cup B}$, et $\overline{\overline{B} \backslash A}$.

Calculer des sommes ou des produits

- Factoriser et développer avec $\sum$.
- Reconnaître et utiliser les formules pour les sommes de termes de suites arithmétiques ou géométriques.
- Reconnaître une somme télescopique.
- Changer d'écriture pour les sommes (ou produits) avec plusieurs indices.
- Appliquer la formule du binôme.

Exercice n° 2

1. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{100} 7k - 3$.
2. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{100} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\displaystyle\sum_{1 \leq i,j \leq n} i^2 j$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\displaystyle\prod_{1 \leq i,j \leq n} i^2 j$.
5. Soit a et b deux complexes. Sans utiliser de $\sum$, factoriser $a^i - b^i$ pour $i \in [\![2;5]\!]$.
6. Soit a et b deux complexes. En déterminant la valeur des coefficients du binôme à l'aide du triangle de Pascal, développer $(a+b)^4$; en déduire le développement de $(a-b)^4$.