Savoirs-faire du Chapitre 6 : Equations différentielles du second ordre, linéaires à coefficients constants.

— Réconnaitre une équation différentielle du second ordre, linéaire à coefficients constants.
— Donner l'équation caractéristique d'une équation différentielle du second ordre, linéaire à coefficients constants.
— Comprendre que les solutions de l'équation différentielle sont des fonctions et que celles de l'équation caractéristique sont des nombres complexes (éventuellement réels).
— Donner l'ensemble des solutions de l'équation homogène.
— Trouver une solution particulière, ou bien vérifier qu'une fonction donnée est une solution particulière.
— Donner l'ensemble des solutions de l'équation complète.
— Exploiter les conditions initiales pour fixer les valeurs des paramètres.

Exercice n° 1

1. Reconnaitre, parmi les équations différentielles suivantes, celles qui sont du second ordre linéaires à coefficients constants. Pour celles-là, donner l'équation caractéristique correspondante.

$$\begin{array}{lll} (E_1) : y' + y^2 = 5t + 1 & (E_2) : 2y = y'' + 1 & (E_3) : y' + 4y'' - 1 = y \\ (E_4) : 3y'' - y + y' + \ln(3 - 5t) = 0 & (E_5) : \frac{2y''-y}{5} = y & (E_6) : \cos(y' + y'') = 5y \\ (E_7) : ty' + y'' = y & (E_8) : \frac{y''}{y} = e^t & (E_9) : y' = y + \cos t \end{array}$$

2. Résoudre les équations homogènes ci-dessous :

$$(E_1) : y'' + 5y' - y = 0 \qquad (E_2) : 3y'' - y' + 10y = 0 \qquad (E_3) : y'' + 2y' - y = 0$$

3. Résoudre les équations différentielles suivantes :

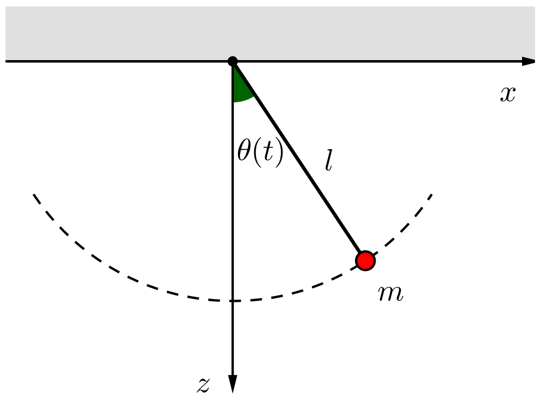
$$\begin{array}{ll} (E_1) : 3y'' + y' = e^{5t} & \text{avec } y(0) = 10 \text{ et } y'(0) = 2 \\ (E_2) : y'' - 4y = \cos(7t) & \text{avec } y(1) = -5 \text{ et } y'(1) = 0 \end{array}$$

4. Soit $f(x) = -(4x - 2)e^{-2x}$. f est-elle solution de $y'' - 3y' + 2y = -4e^{2x}$?
5. On considère une masse m accrochée au bout d'un fil de longueur l.

Au temps $t = 0$, on lache le pendule ainsi constitué depuis un angle de 30^o et on observe un mouvement oscillant avec l'angle $\theta(t)$ qui varie.

Si on néglige les frottements, en appliquant la conservation de l'énergie mécanique du système on aboutit à l'équation suivante :

$$\theta'' + \frac{mg}{l}\theta = 0.$$



Résoudre cette équation différentielle (dont les conditions initiales sont à trouver dans l'énoncé).