Savoirs-faire du Chapitre 7 : Compléments sur les complexes.

Nombres complexes et trigonométrie

— Linéariser une expression trigonométrique.
— Manipuler des expressions trigonométriques en faisant intervenir $e^{i\theta}$, par exemple en utilisant l'angle moitié.

Exercice n° 1

1. Linéariser l'expression $\sin^4 x$ (pour $x \in \mathbb{R}$).
2. Pour $x \in \mathbb{R}$ exprimer $\sin(5x)$ en fonction de $\cos x$ et de $\sin x$.
3. Pour $x \in \mathbb{R}$, exprimer sous forme d'un produit $\cos x - \cos 5x$.

Forme exponentielle d'un complexe

— Trouver la forme exponentielle d'un complexe dont on connait la forme algébrique.
— Trouver la forme algébrique d'un complexe dont on connait la forme exponentielle.
— Utiliser la forme exponentielle pour retrouver les racines n-ièmes de l'unité.
— Résoudre $z^n = a$ pour $a \in \mathbb{C}$.
— Donner l'argument et le complexe d'une exponentielle complexe.

Exercice n° 2

1. Donner la forme exponentielle des complexes suivants :

$$z_1 = -8i \qquad z_2 = (1+i)^3 \qquad z_3 = 13 - 5i \qquad z_4 = \frac{1}{3i - \sqrt{3}}$$

2. Donner la forme algébrique du complexe $7e^{0,3i}$.
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^5 = -4 - 4i$.
4. Donner la forme algébrique de $z = e^{3+i}$.

Nombres complexes et géométrie

— Utiliser les complexes pour caractériser l'alignement, l'orthogonalité dans le plan.
— Formuler une transformation géométrique comme une opération sur les affixes complexes.
— Interpréter une opération sur les complexes comme une transformation géométrique.

Exercice n° 3

1. Dans le plan complexe, on considère les points $A(2+3i)$, $B(1+6i)$ et $C(-1+2i)$. Calculer le complexe $\frac{c-a}{b-a}$. Que peut-on en déduire sur le triangle ABC ?
2. Dans le plan complexe, on considère la rotation R de centre $A(1-4i)$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$. Soit $M(z)$ un point du plan, quelle est l'affixe de $R(M)$?
3. On considère l'application $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & 3iz + (2-i) \end{array} \right.$
   Interpréter f dans le plan complexe comme une succession de tranformations élémentaires du plan.