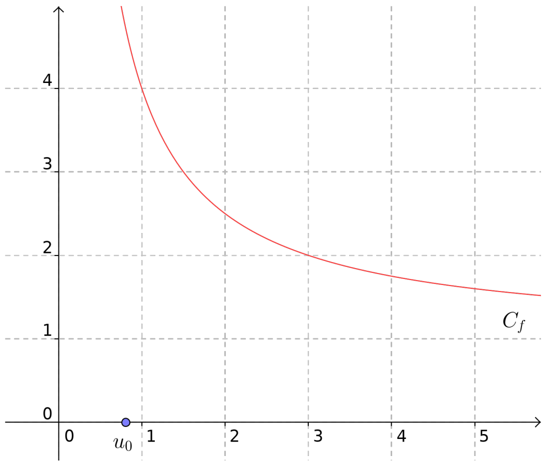
Savoirs-faire du Chapitre 8 : Suites.

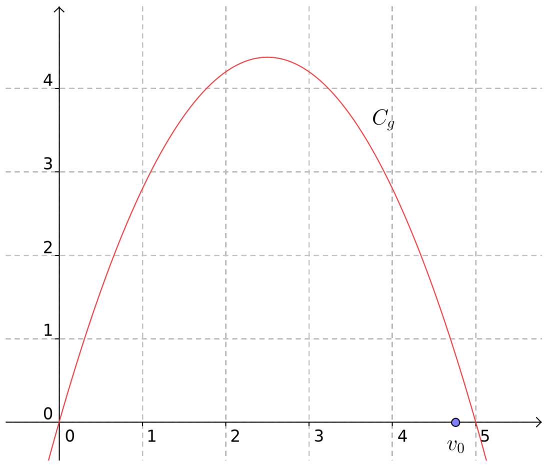
Généralités sur les suites

— Manipuler des suites définies de façon explicite, implicite ou par récurrence.
— Représenter les termes d'une suite.
— Connaître les suites de référence : arithmétique, géométrique, arithmético-géométrique, récurrente linéaire d'ordre 2.
— Etudier les variations d'une suite.

Exercice n° 1

1. Soit la suite définie par : $\begin{cases} u_0 & = & 1 \\ u_{n+1} & = & \frac{u_n}{u_n+2} \end{cases}$. Exprimer de façon explicite u_n en fonction de n.
2. Sur les deux figures ci-dessous, représenter sur l'axe des abscisses les termes des suites u et v qui vérifient, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ et $v_{n+1} = g(v_n)$.





3. Soit la suite u définie par $u_0 = 3$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_{n+1} = -2u_n + 1$. Déterminer une expression de u_n en fonction de n.
4. Déterminer la suite v qui est solution de $\begin{cases} v_0 = 2, \ v_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \ v_{n+2} = 2v_{n+1} - v_n \end{cases}$.
5. La suite $(2n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle extraite de $(n^2)_{n\in\mathbb{N}}$?
6. Etudier les variations des suites suivantes :

$$\left(\frac{3-n^2}{n+2}\right)_{n\in\mathbb{N}} \quad ; \quad \left(\frac{3^n}{2\times 5^{n-1}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*} \quad ; \quad (\cos n)_{n\in\mathbb{N}} \quad ; \quad \left(\frac{4^n}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*} \quad ; \quad \left(\frac{n!}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$$

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \ x_{n+1} = \sqrt{4 + x_n^2} \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} z_0 = 5 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \ z_{n+1} = \frac{z_n^2}{1+z_n} \end{cases}$$

Limites

— Démontrer une propriété.
— Utiliser la définition pour prouver une limite.
— Calculer une limite par opérations sur les limites.
— Utiliser le théorème des gendarmes.
— Prouver qu'une limite existe par croissance dominée.
— Utiliser les suites extraites pour étudier une limite.
— Utiliser le théorème des suites adjacentes.

Exercice n° 2

1. Prouver l'unicité de la limite d'une suite (lorsque la limite existe).
2. Prouver qu'une suite convergente est bornée.
3. En utilisant la définition, démontrer que : $\frac{n+2\sin n}{n^2+\cos n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et que : $n^2(\sin n - 3) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.
4. Justifier que la suite $((-1)^n))_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.
5. Déterminer les limites des suites suivantes :

$$\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)_{n\in\mathbb{N}} \quad ; \quad \left(\sqrt[n]{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*} \quad ; \quad \left(\frac{n^2+n\cos n}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}} \quad ; \quad \left(\frac{2+(-1)^n n}{n+2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

6. On considère la suite u définie par $u_0 = 0$ et, $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \mathrm{e}^{u_n}$. Justifier que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.