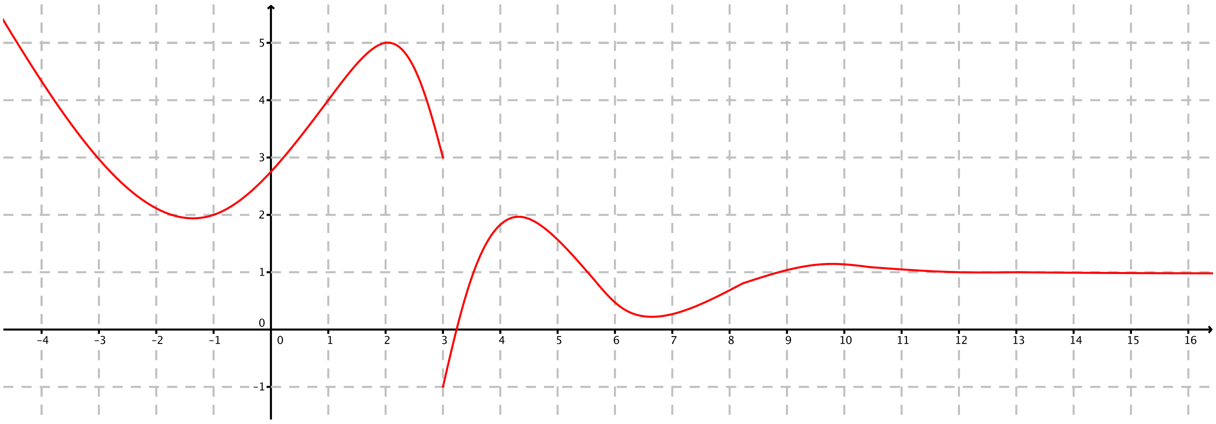
Savoirs-faire du Chapitre 9 : limites et continuité.

Comprendre les notions de limites et de continuité

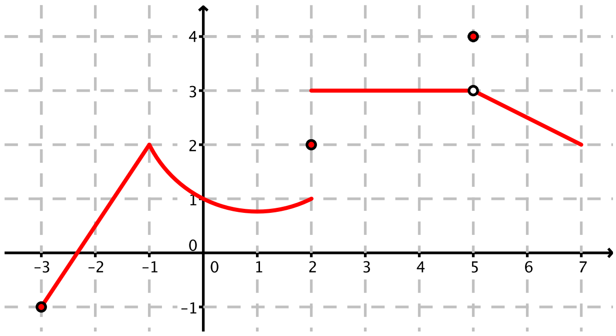
— Lire une limite sur la courbe représentative d'une fonction.
— Voir si une courbe représentative correspond à une fonction continue ou pas.
— Justifier la continuité en se référant aux fonctions de référence.

Exercice n° 1

1. Si elles existent, déterminer par lecture graphique les limites de f : en -3, en $+\infty$, en 3, en -1^+, en 1, en $-\infty$, en 3^+.



2. Discuter la continuité de f en -3, -1, 2, 5 et 7.



Peut-on prolonger f par continuité en 7 ? en 5 ?

3. Etudier la continuité des fonctions suivantes :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \sin x & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{si } x < 0 \\ \cos x & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \qquad h(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x < -1 \\ x^2 & \text{si } x \in [-1; 1] \\ 2x - 3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Travailler avec les notations mathématiques

— Démontrer une propriété.
— Appliquer les définitions pour étudier une limite, la continuité en un point.
— Calculer des limites.
— Utiliser des suites pour prouver qu'une limite n'existe pas.

Exercice n° 2

1. Montrer que si la fonction f a une limite finie en $a \in \overline{\mathbb{R}}$ alors f est bornée au voisinage de a.
2. Montrer que toute fonction croissante et majorée admet une limite finie en $+\infty$.

3. Prouver que si f et g sont deux fonctions qui ont des limites finies en 3 alors $f+g$ et $f\times g$ ont des limites finies en 3.
4. Prouver que $x \mapsto \sin(\frac{1}{x})$ n'a pas de limite en 0^+.
5. La fonction $f(x) = \dfrac{2x^2-4x-30}{x^2+2x-3}$ peut-elle être prolongée par continuité ?
6. Etudier les limites en $+\infty$ de $x \longmapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$ et $x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x}$.

Utiliser la continuité

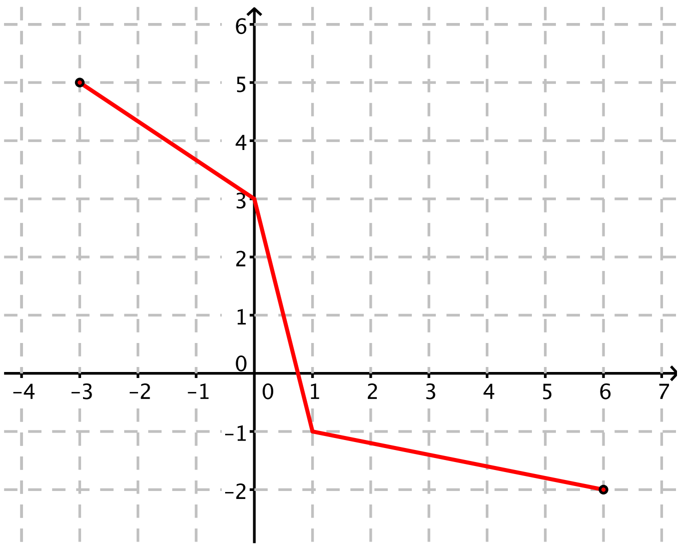
— Prouver qu'une équation admet une/des solutions à l'aide du TVI.
— Déterminer l'image d'un intervalle par une fonction continue.
— Prouver qu'une fonction est bijective.

Exercice n° 3

1. Prouver que, pour tout réel k, l'équation $2x^3-3x+2=k$ admet des solutions.
2. Préciser le nombre de solutions en fonction de k.
3. Donner l'image de $[-1;1[$ par les fonctions $f(x)=x^3+x$ et $g(x)=x^3-x$.
4. Pour les fonctions suivantes, déterminer l'image de l'intervalle I proposé.

$$f_1(x)=4x+1,\ I_1=[-3;7[\quad ; \quad f_2(x)=x^2,\ I_2=[1;3[\quad ; \quad f_3(x)=x^2,\ I_3=[-4;1[$$

5. On considère la fonction $f(x)$ représentée ci-dessous :



Justifier qu'elle réalise une bijection entre des intervalles qu'on précisera, puis représenter la courbe de sa réciproque.

6. Trouver la plus grande valeur du réel positif a tel que $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ réalise un bijection de $]0;a]$ sur un intervalle à déterminer.