Automatismes en calcul, semaine du 11 mars

14 mars 2024

classes préparatoires scientifiques Lycée Brizeux

Lundi : développement limité et application

Mercredi : trouver la dimension d'un EV

Jeudi : une équa diff

Vendredi : fraction rationnelle

Peut-on prolonger $f(x) = \dfrac{2x}{\ln(\frac{1+x}{1-x})}$ par continuité ?

Peut-on prolonger $f(x) = \dfrac{2x}{\ln(\frac{1+x}{1-x})}$ par continuité ?

$\frac{1+x}{1-x} > 0 \iff x \in]-1;1[$ et $\ln(\frac{1+x}{1-x}) = 0 \iff x = 0$.
Le domaine de définition de f est donc $]-1;1[\backslash\{0\}$.

Peut-on prolonger $f(x) = \dfrac{2x}{\ln(\frac{1+x}{1-x})}$ par continuité ?

$\frac{1+x}{1-x} > 0 \iff x \in]-1;1[$ et $\ln(\frac{1+x}{1-x}) = 0 \iff x = 0$.
Le domaine de définition de f est donc $]-1;1[\backslash\{0\}$.

Par opérations, en -1^+ et en 1^-, $f(x) \to 0$.

Peut-on prolonger $f(x) = \dfrac{2x}{\ln(\frac{1+x}{1-x})}$ par continuité ?

$\frac{1+x}{1-x} > 0 \iff x \in]-1;1[$ et $\ln(\frac{1+x}{1-x}) = 0 \iff x = 0$.
Le domaine de définition de f est donc $]-1;1[\backslash\{0\}$.

Par opérations, en -1^+ et en 1^-, $f(x) \to 0$.

$$\frac{2x}{\ln(\frac{1+x}{1-x})} = \frac{2x}{\ln(1+x) - \ln(1-x)} \underset{x\to 0}{=} \frac{2x}{2x + o(x)} \underset{x\to 0}{\sim} 1$$

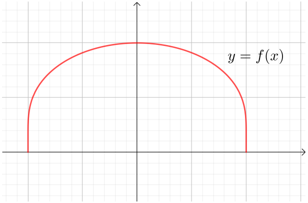
Peut-on prolonger $f(x) = \dfrac{2x}{\ln(\frac{1+x}{1-x})}$ par continuité ?

$\frac{1+x}{1-x} > 0 \iff x \in]-1;1[$ et $\ln(\frac{1+x}{1-x}) = 0 \iff x = 0$.
Le domaine de définition de f est donc $]-1;1[\backslash\{0\}$.

Par opérations, en -1^+ et en 1^-, $f(x) \to 0$.

$$\frac{2x}{\ln(\frac{1+x}{1-x})} = \frac{2x}{\ln(1+x) - \ln(1-x)} \underset{x\to 0}{=} \frac{2x}{2x + o(x)} \underset{x\to 0}{\sim} 1$$

f se prolonge donc par continuité à $[-1;1]$ en posant $f(-1) = f(1) = 0$ et $f(0) = 1$.



Justifier rapidement que $A = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \ / \ P = XP'\}$ est un SEV de $\mathbb{R}_2[X]$ puis donner sa dimension.

Justifier rapidement que $A = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \ / \ P = XP'\}$ est un SEV de $\mathbb{R}_2[X]$ puis donner sa dimension.

A est non vide car $0 \in A$ et stable par combinaison linéaire, c'est un SEV.

Justifier rapidement que $A = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \;/\; P = XP'\}$ est un SEV de $\mathbb{R}_2[X]$ puis donner sa dimension.

A est non vide car $0 \in A$ et stable par combinaison linéaire, c'est un SEV.

Soit $P = aX^2 + bX + c$. On a :

$$\begin{aligned} P \in A &\iff P = XP' \iff aX^2 + bX + c = 2aX^2 + bX \\ &\iff a = c = 0 \end{aligned}$$

Justifier rapidement que $A = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \ / \ P = XP'\}$ est un SEV de $\mathbb{R}_2[X]$ puis donner sa dimension.

A est non vide car $0 \in A$ et stable par combinaison linéaire, c'est un SEV.

Soit $P = aX^2 + bX + c$. On a :

$$\begin{aligned} P \in \ A &\iff P = XP' \iff aX^2 + bX + c = 2aX^2 + bX \\ &\iff a = c = 0 \end{aligned}$$

On a donc $A = \mathrm{Vect}(X)$ et donc $\dim(A) = 1$.

Résoudre $y' - \frac{y}{x} = x^2$ pour $x > 0$.

Résoudre $y' - \frac{y}{x} = x^2$ pour $x > 0$.

Les solutions de l'équation homogène sont les $x \mapsto \lambda x$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$.

Résoudre $y' - \frac{y}{x} = x^2$ pour $x > 0$.

Les solutions de l'équation homogène sont les $x \mapsto \lambda x$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$.

On cherche une solution particulière de la forme $f(x) = \lambda(x)x$ avec $\lambda(x)$ une fonction dérivable. On a :

$$f'(x) - \frac{f(x)}{x} = x^2 \Leftrightarrow \lambda'(x) = x^2 \Leftarrow \lambda(x) = \frac{1}{3}x^3$$

$f(x) = \frac{1}{3}x^4$ est donc une solution particulière.

Résoudre $y' - \frac{y}{x} = x^2$ pour $x > 0$.

Les solutions de l'équation homogène sont les $x \mapsto \lambda x$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$.

On cherche une solution particulière de la forme $f(x) = \lambda(x)x$ avec $\lambda(x)$ une fonction dérivable. On a :

$$f'(x) - \frac{f(x)}{x} = x^2 \Leftrightarrow \lambda'(x) = x^2 \Leftarrow \lambda(x) = \frac{1}{3}x^3$$

$f(x) = \frac{1}{3}x^4$ est donc une solution particulière.

La solution générale de l'équation est :

$$y(x) = \lambda x + \frac{1}{3}x^4, \quad \text{pour } x > 0 \text{ et } \lambda \in \mathbb{R}$$

classes préparatoires scientifiques Lycée Brizeux

Décomposer en éléments simples $f(x) = \dfrac{x^4}{x^2 + 3x + 2}$.

Décomposer en éléments simples $f(x) = \dfrac{x^4}{x^2+3x+2}$.

$X^4 = (X^2+3X+2)(X^2-3X+7) - 15X - 14$ et
$X^2+3X+2 = (X+1)(X+2)$

Décomposer en éléments simples $f(x) = \dfrac{x^4}{x^2+3x+2}$.

$X^4 = (X^2+3X+2)(X^2-3X+7) - 15X - 14$ et
$X^2+3X+2 = (X+1)(X+2)$

On déduit que, pour $x \notin \{-2; -1\}$:

$$f(x) = x^2 - 3x + 7 - \frac{15x+14}{(x+1)(x+2)} = x^2 - 3x + 7 + \frac{\alpha}{x+1} + \frac{\beta}{x+2}$$

avec α et β des réels à trouver.

Décomposer en éléments simples $f(x) = \dfrac{x^4}{x^2+3x+2}$.

$X^4 = (X^2+3X+2)(X^2-3X+7) - 15X - 14$ et
$X^2+3X+2 = (X+1)(X+2)$

On déduit que, pour $x \notin \{-2; -1\}$:

$$f(x) = x^2 - 3x + 7 - \frac{15x+14}{(x+1)(x+2)} = x^2 - 3x + 7 + \frac{\alpha}{x+1} + \frac{\beta}{x+2}$$

avec α et β des réels à trouver.

$\frac{-15x-14}{x+2} = \alpha + \frac{\beta(x+1)}{x+2}$ et en faisant $x \to -1$ on a $\alpha = 1$.
De même, on trouve $\beta = -16$.

Décomposer en éléments simples $f(x) = \dfrac{x^4}{x^2+3x+2}$.

$X^4 = (X^2+3X+2)(X^2-3X+7) - 15X - 14$ et
$X^2+3X+2 = (X+1)(X+2)$

On déduit que, pour $x \notin \{-2; -1\}$:

$$f(x) = x^2 - 3x + 7 - \frac{15x+14}{(x+1)(x+2)} = x^2 - 3x + 7 + \frac{\alpha}{x+1} + \frac{\beta}{x+2}$$

avec α et β des réels à trouver.

$\frac{-15x-14}{x+2} = \alpha + \frac{\beta(x+1)}{x+2}$ et en faisant $x \to -1$ on a $\alpha = 1$.
De même, on trouve $\beta = -16$.

A quoi cela peut-il servir ?

classes préparatoires scientifiques
Lycée Brizeux