Automatismes en calcul, semaine du 12 février

14 février 2024

Lundi : fractions rationnelles

Mercredi : libre ou liée ?

Jeudi : trouver des bases

Vendredi : interro de cours

Décomposer en éléments simples $f(x) = \dfrac{x^5+1}{x^3+x}$

Décomposer en éléments simples $f(x) = \dfrac{x^5+1}{x^3+x}$

- $X^5 + 1 = (X^3 + X)(X^2 - 1) + X + 1$ et $X^3 + X = X(X^2 + 1)$.
  donc $\forall x \neq 0,\ f(x) = x^2 - 1 + \dfrac{x+1}{x(x^2+1)}$

Décomposer en éléments simples $f(x) = \dfrac{x^5+1}{x^3+x}$

- $X^5+1 = (X^3+X)(X^2-1)+X+1$ et $X^3+X = X(X^2+1)$.
  donc $\forall x \neq 0,\ f(x) = x^2-1+\dfrac{x+1}{x(x^2+1)}$
- La décomposition en éléments simples s'écrit :

$$\forall x \neq 0,\ \frac{x+1}{x(x^2+1)} = \frac{a}{x} + \frac{cx+d}{x^2+1} = \frac{a}{x} + \frac{\lambda}{x+\mathrm{i}} + \frac{\mu}{x-\mathrm{i}}$$

Décomposer en éléments simples $f(x) = \dfrac{x^5+1}{x^3+x}$

- $X^5+1 = (X^3+X)(X^2-1) + X + 1$ et $X^3+X = X(X^2+1)$.
  donc $\forall x \neq 0,\ f(x) = x^2 - 1 + \dfrac{x+1}{x(x^2+1)}$
- La décomposition en éléments simples s'écrit :

$$\forall x \neq 0,\ \frac{x+1}{x(x^2+1)} = \frac{a}{x} + \frac{cx+d}{x^2+1} = \frac{a}{x} + \frac{\lambda}{x+\mathrm{i}} + \frac{\mu}{x-\mathrm{i}}$$

On multiplie par x ; $x \to 0$ donne $a = 1$.
On multiplie par $x - \mathrm{i}$; $x \to \mathrm{i}$ donne $\mu = \frac{1+\mathrm{i}}{-2}$.
On multiplie par $x + \mathrm{i}$; $x \to -\mathrm{i}$ donne $\lambda = \frac{1-\mathrm{i}}{-2}$.
On déduit $b = -1$ et $c = 1$

classes préparatoires scientifiques Lycée Brizeux

$((3n+2)_n ; (5n+1)_n ; (-n+7)_n)$ et $(x \mapsto \sin(x^k))_{k \in [\![1;100]\!]}$ sont-elles libres ou liées ?

$((3n+2)_n; (5n+1)_n; (-n+7)_n)$ et $(x \mapsto \sin(x^k))_{k\in[\![1;100]\!]}$
sont-elles libres ou liées ?

- On travaille avec des suites.

$$\alpha(3n+2)_n + \beta(5n+1)_n + \gamma(-n+7)_n = 0$$
$$\iff \forall n,\ n(3\alpha+5\beta-\gamma)+2\alpha+\beta+7\gamma = 0$$
$$\iff \begin{cases} 2\alpha+\beta-7\gamma = 0 \\ 3\alpha+5\beta-\gamma \end{cases} \implies \begin{array}{c}\infty\text{té}\\ \text{de solutions}\end{array} \ :\ \text{liée !}$$

On pouvait répondre plus vite. Comment ?

$((3n+2)_n; (5n+1)_n; (-n+7)_n)$ et $(x \mapsto \sin(x^k))_{k \in [\![1;100]\!]}$ sont-elles libres ou liées ?

- On travaille avec des suites.
  $\alpha(3n+2)_n + \beta(5n+1)_n + \gamma(-n+7)_n = 0$
  $\iff \forall n,\ n(3\alpha+5\beta-\gamma) + 2\alpha+\beta+7\gamma = 0$
  $\iff \begin{cases} 2\alpha+\beta-7\gamma = 0 \\ 3\alpha+5\beta-\gamma \end{cases} \implies \begin{array}{c} \infty\text{té} \\ \text{de solutions} \end{array} \ : \ \text{liée !}$
  On pouvait répondre plus vite. Comment ?
- On a 100 vecteurs dans un espace de fonction, pas question d'avoir un système !

$((3n+2)_n ; (5n+1)_n ; (-n+7)_n)$ et $(x \mapsto \sin(x^k))_{k\in[\![1;100]\!]}$ sont-elles libres ou liées ?

- On travaille avec des suites.
  $\alpha(3n+2)_n + \beta(5n+1)_n + \gamma(-n+7)_n = 0$
  $\iff \forall n,\ n(3\alpha+5\beta-\gamma) + 2\alpha+\beta+7\gamma = 0$
  $\iff \begin{cases} 2\alpha+\beta-7\gamma = 0 \\ 3\alpha+5\beta-\gamma \end{cases} \implies \begin{matrix} \infty\text{té} \\ \text{de solutions} \end{matrix} \ : \ \text{liée !}$
  On pouvait répondre plus vite. Comment ?
- On a 100 vecteurs dans un espace de fonction, pas question d'avoir un système !
  Supposons que $\displaystyle\sum_{i=1}^{100} \lambda_i f_i = 0$ Supposons que la CL soit non triviale et notons $k = \min(i/\lambda_i \neq 0)$. On a $\lambda_k f_k = -\sum_{i=k+1}^{100} \lambda_i f_i$ et c'est absurde... Pourquoi ?

Trouver des bases de $A = \{(x; y) \in \mathbb{K}^2 \ / \ 3x = 2y\}$ et $B = \{(x; y; z; t) \in \mathbb{K}^4 \ / \ x + y = z + t\}$.

Trouver des bases de $A = \{(x; y) \in \mathbb{K}^2 \ / \ 3x = 2y\}$ et $B = \{(x; y; z; t) \in \mathbb{K}^4 \ / \ x + y = z + t\}$.

- Les éléments de A sont de la forme $(x; \frac{3}{2}x) = x(1; \frac{3}{2})$ donc $A = \mathrm{Vect}((1; \frac{3}{2}))$.
  $((1; \frac{3}{2}))$ est génératrice de A et libre (car ?), c'est donc une base de A.

Trouver des bases de $A = \{(x; y) \in \mathbb{K}^2 \ / \ 3x = 2y\}$ et $B = \{(x; y; z; t) \in \mathbb{K}^4 \ / \ x + y = z + t\}$.

- Les éléments de A sont de la forme $(x; \frac{3}{2}x) = x(1; \frac{3}{2})$ donc $A = \mathrm{Vect}((1; \frac{3}{2}))$.
  $((1; \frac{3}{2}))$ est génératrice de A et libre (car ?), c'est donc une base de A.
- Les éléments de B sont de la forme :
  $(x; y; z; x + y - z) = x(1; 0; 0; 1) + y(0; 1; 0; 1) + z(0; 0; 1; -1)$ donc $B = \mathrm{Vect}((1; 0; 0; 1); (0; 1; 0; 1); (0; 0; 1; -1))$.
  La famille est génératrice de B. On vérifie qu'elle est libre (pas moyen de le dire directement car il y a > 2 vecteurs) c'est donc une base de B.

test