

# Automatismes en calcul, semaine du 12 mai

11 mai 2025

$$I_1 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^3(2x) \sin(3x) dx \quad ; \quad I_2 = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \tan(x) dx$$

$$I_1 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^3(2x) \sin(3x) dx \quad ; \quad I_2 = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \tan(x) dx$$

$$\begin{aligned} \bullet \cos^3(2x) \sin(3x) &= \frac{1}{16i} (e^{i2x} + e^{-i2x})^3 (e^{i3x} - e^{-i3x}) \\ &= \frac{1}{8} (\sin(9x) - \sin(3x) + 3 \sin(5x) + 3 \sin(x)) \end{aligned}$$

donc

$$I_1 = \frac{1}{8} \left[ -\frac{\cos(9x)}{9} + \frac{\cos(3x)}{3} - \frac{3 \cos(5x)}{5} - \cos(x) \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{15}{36}$$

$$I_1 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^3(2x) \sin(3x) dx \quad ; \quad I_2 = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \tan(x) dx$$

$$\begin{aligned} \bullet \cos^3(2x) \sin(3x) &= \frac{1}{16i} (e^{i2x} + e^{-i2x})^3 (e^{i3x} - e^{-i3x}) \\ &= \frac{1}{8} (\sin(9x) - \sin(3x) + 3 \sin(5x) + 3 \sin(x)) \end{aligned}$$

donc

$$I_1 = \frac{1}{8} \left[ -\frac{\cos(9x)}{9} + \frac{\cos(3x)}{3} - \frac{3 \cos(5x)}{5} - \cos(x) \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{15}{36}$$

$$\bullet I_2 = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(x)}{\cos(x)} dx = [-\ln(\cos(x))]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n k \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \quad ; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n + \frac{k^2}{n}}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n k \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \quad ; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n + \frac{k^2}{n}}$$

- $\forall x \neq 1,$

$$\sum_{k=1}^n kx^{k-1} = \sum_{k=1}^n \frac{d}{dx} (x^k) = \frac{d}{dx} \left( \sum_{k=1}^n x^k \right) = \frac{d}{dx} \left( \sum_{k=0}^n x^k - 1 \right)$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{1-x} \right) = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

donc, pour  $x = \frac{1}{2}$ , on trouve que la première limite est 4.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n k \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \quad ; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n + \frac{k^2}{n}}$$

- $\forall x \neq 1,$

$$\sum_{k=1}^n kx^{k-1} = \sum_{k=1}^n \frac{d}{dx} (x^k) = \frac{d}{dx} \left( \sum_{k=1}^n x^k \right) = \frac{d}{dx} \left( \sum_{k=0}^n x^k - 1 \right)$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{1-x} \right) = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

donc, pour  $x = \frac{1}{2}$ , on trouve que la première limite est 4.

Tout est ok ?

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n k \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \quad ; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n + \frac{k^2}{n}}$$

- $\forall x \neq 1,$

$$\sum_{k=1}^n kx^{k-1} = \sum_{k=1}^n \frac{d}{dx} (x^k) = \frac{d}{dx} \left( \sum_{k=1}^n x^k \right) = \frac{d}{dx} \left( \sum_{k=0}^n x^k - 1 \right)$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{1-x} \right) = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

donc, pour  $x = \frac{1}{2}$ , on trouve que la première limite est 4.

Souci : interversion limite et dérivation. Comment le lever ?

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n k \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \quad ; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n + \frac{k^2}{n}}$$

- $\forall x \neq 1,$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n kx^{k-1} &= \sum_{k=1}^n \frac{d}{dx} (x^k) = \frac{d}{dx} \left( \sum_{k=1}^n x^k \right) = \frac{d}{dx} \left( \sum_{k=0}^n x^k - 1 \right) \\ &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{1-x} \right) = \frac{1}{(1-x)^2}. \end{aligned}$$

donc, pour  $x = \frac{1}{2}$ , on trouve que la première limite est 4.

Souci : interversion limite et dérivation. Comment le lever ?

Passer par les sommes partielles... ou se servir du programme de spé;-)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n k \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \quad ; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n + \frac{k^2}{n}}$$

- $\forall x \neq 1,$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n kx^{k-1} &= \sum_{k=1}^n \frac{d}{dx} (x^k) = \frac{d}{dx} \left( \sum_{k=1}^n x^k \right) = \frac{d}{dx} \left( \sum_{k=0}^n x^k - 1 \right) \\ &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{1-x} \right) = \frac{1}{(1-x)^2}. \end{aligned}$$

donc, pour  $x = \frac{1}{2}$ , on trouve que la première limite est 4.

Souci : interversion limite et dérivation. Comment le lever ?

Passer par les sommes partielles... ou se servir du programme de spé;-)

- on reconnaît une somme de Riemann :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{n + \frac{k^2}{n}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}$$

Soit  $u$  définie par  $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 5u_n - 3 \end{cases}$ .

Exprimer  $u_n$  en fonction de  $n$ .

---

$$\text{Soit } u \text{ définie par } \begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 5u_n - 3 \end{cases} .$$

Exprimer  $u_n$  en fonction de  $n$ .

---

Il s'agit d'une suite arithmético-géométrique. On applique la méthode.

Soit  $u$  définie par 
$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 5u_n - 3 \end{cases} .$$

Exprimer  $u_n$  en fonction de  $n$ .

---

Il s'agit d'une suite arithmético-géométrique. On applique la méthode.

$f(x) = 5x - 3$  a pour point fixe  $r = \frac{3}{4}$ . La suite  $v = u - r$  est géométrique de raison 5 :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n - r = 5^n(u_0 - r) \iff u_n = 5^n(u_0 - r) + r$$

C'est-à-dire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{5^{n+1} + 3}{4}$$

Ecrire une fonction qui, étant donné un entier  $n$ , renvoie la  $n$ -ième somme partielle de la série harmonique alternée.

---

Ecrire une fonction qui, étant donné un entier  $n$ , renvoie la  $n$ -ième somme partielle de la série harmonique alternée.

---

Pour commencer, il faut bien comprendre ce qu'on doit calculer.

Ecrire une fonction qui, étant donné un entier  $n$ , renvoie la  $n$ -ième somme partielle de la série harmonique alternée.

---

$$\text{On veut } \text{somme}(n) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k}.$$

```
1 from math import *
2
3 def somme(n):
4     # n est un int
5     # renvoie la n-è somme partielle de la série
6     # harmonique alternée
7
8     resultat=
9
10    for k in      :
11        resultat=
12
13    return(resultat)
```

Ecrire une fonction qui, étant donné un entier  $n$ , renvoie la  $n$ -ième somme partielle de la série harmonique alternée.

---

$$\text{On veut } \text{somme}(n) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k}.$$

```
1 from math import *
2
3 def somme(n):
4     # n est un int
5     # renvoie la n-è somme partielle de la série
6     # harmonique alternée
7
8     resultat=0
9
10    for k in range(1,n+1):
11        resultat=resultat+(-1)**k/k
12
13    return(resultat)
```

Ecrire une fonction qui, étant donné un entier  $n$ , renvoie la  $n$ -ième somme partielle de la série harmonique alternée.

---

$$\text{On veut } \text{somme}(n) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k}.$$

```
1 from math import *
2
3 def somme(n):
4     # n est un int
5     # renvoie la n-è somme partielle de la série
6     # harmonique alternée
7
8     resultat=0
9
10    for k in range(1,n+1):
11        resultat=resultat+(-1)**k/k
12
13    return(resultat)
```

Une critique à formuler ?