Automatismes en calcul, semaine du 13 novembre

14 novembre 2023

classes préparatoires scientifiques Lycée Brizeux

- $\pi^x = 2$
- $\cos(x+1) = 0,7$
- $|3x+2| = \sqrt{7}$

- $\pi^x = 2$
  Pour tout réel x, π^x vaut $\mathrm{e}^{x\ln(\pi)}$. On a donc :
  $\pi^x = 2 \Leftrightarrow x = \frac{\ln(2)}{\ln(\pi)}$.

- $\cos(x+1) = 0,7$

- $|3x+2| = \sqrt{7}$

- $\pi^x = 2$
  Pour tout réel x, π^x vaut $\mathrm{e}^{x\ln(\pi)}$. On a donc :
  $\pi^x = 2 \Leftrightarrow x = \frac{\ln(2)}{\ln(\pi)}$.

- $\cos(x+1) = 0,7$
  $\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(x+1) = 0,7 \Leftrightarrow x + 1 = \pm \mathrm{Arccos}(0,7) + 2k\pi$
  $\Leftrightarrow x = -1 \pm \mathrm{Arccos}(0,7) + 2k\pi$ (k désigne un entier).

- $|3x+2| = \sqrt{7}$

- $\pi^x = 2$
  Pour tout réel x, π^x vaut $\mathrm{e}^{x\ln(\pi)}$. On a donc :
  $\pi^x = 2 \Leftrightarrow x = \frac{\ln(2)}{\ln(\pi)}$.

- $\cos(x+1) = 0,7$
  $\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(x+1) = 0,7 \Leftrightarrow x+1 = \pm\mathrm{Arccos}(0,7) + 2k\pi$
  $\Leftrightarrow x = -1 \pm \mathrm{Arccos}(0,7) + 2k\pi$ (k désigne un entier).

- $|3x+2| = \sqrt{7}$
  On interprête la valeur absolue comme une distance et
  $|3x+2| = \sqrt{)} \Leftrightarrow x \in \{\frac{\sqrt{7}-2}{3}; \frac{\sqrt{7}+2}{3}\}$.

- $|3x+2| = \sqrt{7}$
  On interprête la valeur absolue comme une distance et
  $|3x+2| = \sqrt{)} \Leftrightarrow x \in \{\frac{\sqrt{7}-2}{3}; \frac{\sqrt{7}+2}{3}\ \}$.

- Pour $x \in \mathbb{R}$, linéariser $\sin^3(x)$. En déduire $\displaystyle\int_0^\pi \sin^3(x)\mathrm{d}x$.

- Calculer $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos^5(x)\sin^7(x)\mathrm{d}x$

- Pour $x \in \mathbb{R}$, linéariser $\sin^3(x)$. En déduire $\int_0^\pi \sin^3(x)\mathrm{d}x$. Pour tout réel x,

$$\sin^3(x) = \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}\right)^3 = \frac{1}{-8\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-3\mathrm{i}x} + 3\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - 3\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right)$$

$$= -\tfrac{1}{4}\sin(3x) + \tfrac{3}{4}\sin(x).$$

- Calculer $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^5(x)\sin^7(x)\mathrm{d}x$

- Pour $x \in \mathbb{R}$, linéariser $\sin^3(x)$. En déduire $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin^3(x)\mathrm{d}x$. Pour tout réel x,

$$\sin^3(x) = \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}\right)^3 = \frac{1}{-8\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-3\mathrm{i}x} + 3\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - 3\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right)$$

$= -\frac{1}{4}\sin(3x) + \frac{3}{4}\sin(x)$. Il suit :

$$\int_0^{\pi} \sin^3(x)\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{12}\cos(3x) - \frac{3}{4}\cos(x)\right]_0^{\pi} = \frac{4}{3}$$

- Calculer $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos^5(x)\sin^7(x)\mathrm{d}x$

- Pour $x \in \mathbb{R}$, linéariser $\sin^3(x)$. En déduire $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin^3(x)\mathrm{d}x$. Pour tout réel x,

$$\sin^3(x) = \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}\right)^3 = \frac{1}{-8\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-3\mathrm{i}x} + 3\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - 3\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right)$$

$$= -\tfrac{1}{4}\sin(3x) + \tfrac{3}{4}\sin(x).$$ Il suit :

$$\int_0^{\pi} \sin^3(x)\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{12}\cos(3x) - \frac{3}{4}\cos(x)\right]_0^{\pi} = \frac{4}{3}$$

- Calculer $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos^5(x)\sin^7(x)\mathrm{d}x$ L'intégrande est impaire et on intègre sur un intervalle centré sur 0, on en déduit que l'intégrale est nulle.

- $\sum_{k=5}^{100} 3k + 2^k =$
- $\sum_{k=1}^{100} \cos(k) =$

- $$\sum_{k=5}^{100} 3k+2^k = 3\sum_{k=5}^{100} k+\sum_{k=5}^{100} 2^k = 3\times\frac{105\times 96}{2}+2^5\times\frac{1-2^{96}}{1-2}$$

- $$\sum_{k=1}^{100} \cos(k) =$$

classes préparatoires scientifiques Lycée Brizeux

- $$\sum_{k=5}^{100} 3k + 2^k = 3\sum_{k=5}^{100} k + \sum_{k=5}^{100} 2^k = 3 \times \frac{105 \times 96}{2} + 2^5 \times \frac{1-2^{96}}{1-2}$$

- $$\sum_{k=1}^{100} \cos(k) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{100} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k}\right) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{100} (\mathrm{e}^{\mathrm{i}})^k\right)$$
$$= \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}} \times \frac{1-\mathrm{e}^{100\mathrm{i}}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}}}\right)$$

classes préparatoires scientifiques Lycée Brizeux

- $$\sum_{k=5}^{100} 3k + 2^k = 3\sum_{k=5}^{100} k + \sum_{k=5}^{100} 2^k = 3 \times \frac{105 \times 96}{2} + 2^5 \times \frac{1 - 2^{96}}{1 - 2}$$

- $$\sum_{k=1}^{100} \cos(k) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{100} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k}\right) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{100} (\mathrm{e}^{\mathrm{i}})^k\right)$$
  $$= \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}} \times \frac{1 - \mathrm{e}^{100\mathrm{i}}}{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}}}\right)$$
  On peut ensuite calculer la forme algébrique du complexe pour en déduire sa partie réelle, ça ne présente pas de difficulté particulère mais l'expression finale n'est pas très jolie...

- Calculer $\binom{10}{6}$

- Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{100} \binom{100}{k}$

- Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{100} \binom{100}{k} 3^k$

- Calculer $\binom{10}{6}$

$$\binom{10}{6} = \frac{10!}{6! \times 4!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 210$$

- Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{100} \binom{100}{k}$

- Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{100} \binom{100}{k} 3^k$

- Calculer $\binom{10}{6}$

$$\binom{10}{6} = \frac{10!}{6! \times 4!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 210$$

- Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{100} \binom{100}{k}$

$$\sum_{k=0}^{100} \binom{100}{k} = \sum_{k=0}^{100} \binom{100}{k} 1^k 1^{n-k} = (1+1)^{100} = 2^{100}$$

- Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{100} \binom{100}{k} 3^k$

$$\sum_{k=0}^{100} \binom{100}{k} 3^k = 4^{100}$$

- Calculer $\binom{10}{6}$

$$\binom{10}{6} = \frac{10!}{6! \times 4!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 210$$

- Calculer $\sum_{k=0}^{100} \binom{100}{k}$

$$\sum_{k=0}^{100} \binom{100}{k} = \sum_{k=0}^{100} \binom{100}{k} 1^k 1^{n-k} = (1+1)^{100} = 2^{100}$$

- Calculer $\sum_{k=0}^{100} \binom{100}{k} 3^k$

$$\sum_{k=0}^{100} \binom{100}{k} 3^k = 4^{100}$$