

Automatismes en calcul, semaine du 16 décembre

15 décembre 2025

Résoudre $5y'' + 4y' + y = t$

Résoudre $5y'' + 4y' + y = t$

L'équation caractéristique est $5r^2 + 4r + 1 = 0$, ses solutions complexes conjuguées sont $r_{1,2} = \frac{-2 \pm i}{5}$ donc l'équation homogène a pour solutions les fonctions

$$t \mapsto e^{\frac{-2}{5}t} \left(\lambda \cos\left(\frac{1}{5}t\right) + \mu \sin\left(\frac{1}{5}t\right) \right) \text{ avec } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

On cherche une solution particulière affine, on trouve que $t \mapsto t - 4$ convient.

La solution générale est donc :

$$t \mapsto t - 4 + e^{\frac{-2}{5}t} \left(\lambda \cos\left(\frac{1}{5}t\right) + \mu \sin\left(\frac{1}{5}t\right) \right) \quad ((\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2)$$

Résoudre $ty' - y = t^2$ sur \mathbb{R} .

Résoudre $ty' - y = t^2$ sur \mathbb{R} .

Pour $t \neq 0$, l'équation homogène est $y' - \frac{1}{t}y = 0$ qui a pour solution $y = \lambda t$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

$t \mapsto t^2$ est solution particulière de l'équation ; la solution générale est donc : $t \mapsto t^2 + \lambda t$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Résoudre $ty' - y = t^2$ sur \mathbb{R} .

Pour $t \neq 0$, l'équation homogène est $y' - \frac{1}{t}y = 0$ qui a pour solution $y = \lambda t$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

$t \mapsto t^2$ est solution particulière de l'équation ; la solution générale est donc : $t \mapsto t^2 + \lambda t$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Ces fonctions sont définies sur les intervalles qui ne contiennent pas 0, on a donc des fonctions de la forme :

$$f : t \mapsto \begin{cases} t^2 + \lambda t & \text{si } t > 0 \\ t^2 + \mu t & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

Quels que soient les réels λ et μ , f se prolonge en une fonction continue sur \mathbb{R} en posant $f(0) = 0$.

Résoudre $ty' - y = t^2$ sur \mathbb{R} .

Pour $t \neq 0$, l'équation homogène est $y' - \frac{1}{t}y = 0$ qui a pour solution $y = \lambda t$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

$t \mapsto t^2$ est solution particulière de l'équation ; la solution générale est donc : $t \mapsto t^2 + \lambda t$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Ces fonctions sont définies sur les intervalles qui ne contiennent pas 0, on a donc des fonctions de la forme :

$$f : t \mapsto \begin{cases} t^2 + \lambda t & \text{si } t > 0 \\ t^2 + \mu t & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

Quels que soient les réels λ et μ , f se prolonge en une fonction continue sur \mathbb{R} en posant $f(0) = 0$.

Mais il faut $\lambda = \mu$ pour que f soit dérivable.

Décomposer $\frac{x^5}{x^2 + 1}$ en éléments simples, sur \mathbb{R} et sur \mathbb{C} .

A l'écoute cette semaine : Radiohead.

- ▶ Everything in its right place
- ▶ Creep
- ▶ Paranoid android
- ▶ Karma police