Automatismes en calcul, semaine du 15 janvier

17 janvier 2024

classes préparatoires scientifiques Lycée Brizeux

Résoudre $(2\mathrm{i}-1)z^2-3z-\mathrm{i}=0$.

Résoudre $(2\mathrm{i}-1)z^2 - 3z - \mathrm{i} = 0$.

$\Delta = 9 + 4\mathrm{i}(2\mathrm{i}-1) = 1 - 4\mathrm{i}$. Il faut trouver δune racine carrée de Δ.

- Avec la forme algébrique : $\delta = a + \mathrm{i}b$ (a, b des réels)
  $\delta^2 = \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 1 \\ a^2 + b^2 = \sqrt{17} \\ 2ab = -4 \end{cases}$ donc $a = \sqrt{\dfrac{1+\sqrt{17}}{2}}$ et
  $b = -\frac{2}{a}$ conviennent.

Résoudre $(2\mathrm{i}-1)z^2 - 3z - \mathrm{i} = 0$.

$\Delta = 9 + 4\mathrm{i}(2\mathrm{i}-1) = 1 - 4\mathrm{i}$. Il faut trouver δune racine carrée de Δ.

- Avec la forme algébrique : $\delta = a + \mathrm{i}b$ (a, b des réels)
  $\delta^2 = \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 1 \\ a^2 + b^2 = \sqrt{17} \\ 2ab = -4 \end{cases}$ donc $a = \sqrt{\dfrac{1+\sqrt{17}}{2}}$ et $b = -\frac{2}{a}$ conviennent.
- Avec la forme exponentielle :

$$\Delta = 1 - 4\mathrm{i} = \sqrt{17}\left(\frac{1}{\sqrt{17}} + \mathrm{i}\frac{-4}{\sqrt{17}}\right) = \sqrt{17}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathrm{Arccos}(\frac{1}{\sqrt{17}})}$$

  Donc $\delta = \sqrt{\sqrt{17}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\mathrm{i}\mathrm{Arccos}(\frac{1}{\sqrt{17}})}$ convient.

classes préparatoires scientifiques Lycée Brizeux

Résoudre $(2\mathrm{i}-1)z^2-3z-\mathrm{i}=0$.

$\Delta=9+4\mathrm{i}(2\mathrm{i}-1)=1-4\mathrm{i}$. Il faut trouver δune racine carrée de Δ.

- Avec la forme algébrique : $\delta=a+\mathrm{i}b$ (a,b des réels)
$\delta^2=\Delta\Leftrightarrow\begin{cases}a^2-b^2=1\\a^2+b^2=\sqrt{17}\\2ab=-4\end{cases}$ donc $a=\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{17}}{2}}$ et $b=-\frac{2}{a}$ conviennent.
- Avec la forme exponentielle :

$$\Delta=1-4\mathrm{i}=\sqrt{17}\left(\frac{1}{\sqrt{17}}+\mathrm{i}\frac{-4}{\sqrt{17}}\right)=\sqrt{17}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathrm{Arccos}(\frac{1}{\sqrt{17}})}$$

Donc $\delta=\sqrt{\sqrt{17}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\mathrm{i}\mathrm{Arccos}(\frac{1}{\sqrt{17}})}$ convient.

Les solutions sont $\boxed{\dfrac{3\pm\delta}{2(2\mathrm{i}-1}}$.

classes préparatoires scientifiques Lycée Brizeux

En précisant les domaines, dériver :

$$f(x) = \ln|\cos(x)| \ ; \ g(x) = (x^2+1)^{\sqrt{2}} \ ; \ h(x) = (\sin(x))^{\cos(x)}$$

En précisant les domaines, dériver :

$$f(x) = \ln|\cos(x)| \ ; \ g(x) = (x^2+1)^{\sqrt{2}} \ ; \ h(x) = (\sin(x))^{\cos(x)}$$

- $\forall x \in \mathbb{R} \backslash \{\frac{\pi}{2} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z}\}, \ f'(x) = \frac{-\sin(x)}{\cos(x)} = -\tan(x)$

En précisant les domaines, dériver :

$$f(x) = \ln|\cos(x)| \ ; \ g(x) = (x^2+1)^{\sqrt{2}} \ ; \ h(x) = (\sin(x))^{\cos(x)}$$

- $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z}\}, \ f'(x) = \frac{-\sin(x)}{\cos(x)} = -\tan(x)$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \ g'(x) = \sqrt{2}(x^2+1)^{\sqrt{2}-1}2x$

En précisant les domaines, dériver :

$$f(x) = \ln|\cos(x)| \;;\; g(x) = (x^2+1)^{\sqrt{2}} \;;\; h(x) = (\sin(x))^{\cos(x)}$$

- $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\},\ f'(x) = \frac{-\sin(x)}{\cos(x)} = -\tan(x)$
- $\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = \sqrt{2}(x^2+1)^{\sqrt{2}-1}2x$
- $h(x) = \mathrm{e}^{\cos(x)\ln(\sin(x))}$ donc h est définie et dérivable sur $\Omega = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]2k\pi; (2k+1)\pi[$ et on a, $\forall x \in \Omega$:
$$h'(x) = \mathrm{e}^{\cos(x)\ln(\sin(x))}\left(-\sin(x)\ln(\sin(x)) + \frac{\cos^2(x)}{\sin(x)}\right)$$

classes préparatoires scientifiques Lycée Brizeux

En précisant les intervalles, donner des primitives :

$$f(x) = \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+3}} \ ; \ g(x) = \frac{\ln(x)}{x} \ ; \ h(x) = \mathrm{e}^{2x}\cos(3x)$$

En précisant les intervalles, donner des primitives :

$$f(x) = \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+3}} \ ; \ g(x) = \frac{\ln(x)}{x} \ ; \ h(x) = \mathrm{e}^{2x}\cos(3x)$$

- $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = 2\sqrt{x^2+x+3} + K \ (K \in \mathbb{R})$

En précisant les intervalles, donner des primitives :

$$f(x) = \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+3}} \ ; \ g(x) = \frac{\ln(x)}{x} \ ; \ h(x) = \mathrm{e}^{2x}\cos(3x)$$

- $\forall x \in \mathbb{R}, \ F(x) = 2\sqrt{x^2+x+3} + K \ (K \in \mathbb{R})$
- $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \ G(x) = \frac{1}{2}(\ln(x))^2 + K \ (K \in \mathbb{R})$

classes préparatoires scientifiques Lycée Brizeux

En précisant les intervalles, donner des primitives :

$$f(x) = \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+3}} \;;\; g(x) = \frac{\ln(x)}{x} \;;\; h(x) = \mathrm{e}^{2x}\cos(3x)$$

- $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = 2\sqrt{x^2+x+3} + K \ (K \in \mathbb{R})$
- $\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ G(x) = \frac{1}{2}(\ln(x))^2 + K \ (K \in \mathbb{R})$
- $\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{x(2+3\mathrm{i})}\right)$ et donc
  $\forall x \in \mathbb{R},\ H(x) = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{2+3\mathrm{i}}\mathrm{e}^{x(2+3\mathrm{i})} + K\right) \ (K \in \mathbb{C})$
  soit $\forall x \in \mathbb{R},\ H(x) = \mathrm{e}^{2x}\left(\frac{2}{13}\cos(3x) + \frac{3}{13}\sin(3x)\right) + \widehat{K}$
  $(\widehat{K} \in \mathbb{R})$

classes préparatoires scientifiques Lycée Brizeux

Calculer les sommes suivantes, en fonction de $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{2k+3}{5} \;;\; \sum_{k=0}^{n} k(k-1) \;;\; \sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{2k+1}$$

---

classes préparatoires scientifiques Lycée Brizeux

Calculer les sommes suivantes, en fonction de $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{2k+3}{5} \ ; \ \sum_{k=0}^{n} k(k-1) \ ; \ \sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{2k+1}$$

- $$\sum_{k=0}^{n} \frac{2k+3}{5} = \frac{2}{5}\sum_{k=0}^{n} k + \frac{3}{5}\sum_{k=0}^{n} 1 = \frac{2}{5}\frac{n(n+1)}{2} + \frac{3}{5}(n+1)$$

classes préparatoires scientifiques Lycée Brizeux

Calculer les sommes suivantes, en fonction de $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{2k+3}{5} \; ; \; \sum_{k=0}^{n} k(k-1) \; ; \; \sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{2k+1}$$

- $$\sum_{k=0}^{n} \frac{2k+3}{5} = \frac{2}{5}\sum_{k=0}^{n} k + \frac{3}{5}\sum_{k=0}^{n} 1 = \frac{2}{5}\frac{n(n+1)}{2} + \frac{3}{5}(n+1)$$

- $$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} k(k-1) &= \sum_{k=0}^{n} k^2 - \sum_{k=0}^{n} k \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{n(n+1)(n-1)}{3}\end{aligned}$$

Calculer les sommes suivantes, en fonction de $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{2k+3}{5} \ ; \ \sum_{k=0}^{n} k(k-1) \ ; \ \sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{2k+1}$$

- $$\sum_{k=0}^{n} \frac{2k+3}{5} = \frac{2}{5}\sum_{k=0}^{n} k + \frac{3}{5}\sum_{k=0}^{n} 1 = \frac{2}{5}\frac{n(n+1)}{2} + \frac{3}{5}(n+1)$$

- $$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} k(k-1) &= \sum_{k=0}^{n} k^2 - \sum_{k=0}^{n} k \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{n(n+1)(n-1)}{3} \end{aligned}$$

- $$\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{2k+1} = \mathrm{e}\sum_{k=0}^{n} (\mathrm{e}^2)^k = \mathrm{e}\frac{1-\mathrm{e}^{2n+2}}{1-\mathrm{e}^2}$$