

Automatismes en calcul, semaine du 16 octobre

15 octobre 2023

- ▶ Factoriser au maximum le polynôme $X^5 - 1$.

- ▶ Soit $x \in \mathbb{R}$. Factoriser $A = \cos(x) + \cos(2x) + \cos(3x)$

- ▶ Factoriser au maximum le polynôme $X^5 - 1$.

Les racines de $X^5 - 1$ sont les racines 5-èmes de 1, on a donc :

$$X^5 - 1 = \prod_{k=1}^5 (X - e^{\frac{ik2\pi}{5}})$$

- ▶ Soit $x \in \mathbb{R}$. Factoriser $A = \cos(x) + \cos(2x) + \cos(3x)$

- ▶ Factoriser au maximum le polynôme $X^5 - 1$.

Les racines de $X^5 - 1$ sont les racines 5-èmes de 1, on a donc :

$$X^5 - 1 = \prod_{k=1}^5 (X - e^{\frac{ik2\pi}{5}})$$

- ▶ Soit $x \in \mathbb{R}$. Factoriser $A = \cos(x) + \cos(2x) + \cos(3x)$

$$\begin{aligned} A &= \operatorname{Re}(e^{ix} + e^{i2x} + e^{i3x}) = \operatorname{Re}(e^{i2x}(1 + e^{-ix} + e^{ix})) \\ &= \operatorname{Re}(e^{i2x}(1 + 2\cos(x))) = ((1 + 2\cos(x))\cos(2x)) \end{aligned}$$

Donner les formes exponentielles de $z_1 = 3 - 5i$ et $z_2 = -2 - 7i$.

Donner les formes exponentielles de $z_1 = 3 - 5i$ et $z_2 = -2 - 7i$.

$$|z_1| = \sqrt{34} \text{ et } z_1 = \sqrt{34} \left(\frac{3}{\sqrt{34}} + i \frac{-5}{\sqrt{34}} \right).$$

Le point $\left(\frac{3}{\sqrt{34}}; \frac{-5}{\sqrt{34}} \right)$ est un point du cercle trigonométrique situé dans le 4^è quadrant et une mesure de l'angle correspondant est $\text{Arcsin}\left(\frac{-5}{\sqrt{34}}\right)$.

$$\text{Finalement, } z_1 = \sqrt{34} e^{i \text{Arcsin}\left(\frac{-5}{\sqrt{34}}\right)}$$

Donner les formes exponentielles de $z_1 = 3 - 5i$ et $z_2 = -2 - 7i$.

$$|z_1| = \sqrt{34} \text{ et } z_1 = \sqrt{34} \left(\frac{3}{\sqrt{34}} + i \frac{-5}{\sqrt{34}} \right).$$

Le point $\left(\frac{3}{\sqrt{34}}; \frac{-5}{\sqrt{34}} \right)$ est un point du cercle trigonométrique situé dans le 4^è quadrant et une mesure de l'angle correspondant est $\text{Arcsin}\left(\frac{-5}{\sqrt{34}}\right)$.

$$\text{Finalement, } z_1 = \sqrt{34} e^{i \text{Arcsin}\left(\frac{-5}{\sqrt{34}}\right)}$$

$$|z_2| = \sqrt{53} \text{ et } z_2 = \sqrt{53} \left(\frac{-2}{\sqrt{53}} + i \frac{-7}{\sqrt{53}} \right).$$

Le point $\left(\frac{-2}{\sqrt{53}}; \frac{-7}{\sqrt{53}} \right)$ est un point du cercle trigonométrique situé dans le 3^è quadrant et une mesure de l'angle correspondant est $-\text{Arccos}\left(\frac{-2}{\sqrt{53}}\right)$.

$$\text{Finalement, } z_2 = \sqrt{53} e^{-i \text{Arccos}\left(\frac{-2}{\sqrt{53}}\right)}$$

Les fonctions $f(x) = (x + 1)(x + 2)(x + 3)$ et $g(x) = \text{Arctan}(\sin(x))$ sont définies et dérivables sur \mathbb{R} .

Calculer leurs dérivées.

Les fonctions $f(x) = (x + 1)(x + 2)(x + 3)$ et $g(x) = \text{Arctan}(\sin(x))$ sont définies et dérivables sur \mathbb{R} .

Calculer leurs dérivées.

- ▶ $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$ et donc $f'(x) = 3x^2 + 12x + 11$.

Les fonctions $f(x) = (x + 1)(x + 2)(x + 3)$ et $g(x) = \text{Arctan}(\sin(x))$ sont définies et dérivables sur \mathbb{R} .

Calculer leurs dérivées.

- ▶ $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$ et donc $f'(x) = 3x^2 + 12x + 11$.
- ▶ $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = \text{Arctan}'(\sin(x)) \times \sin'(x) = \frac{\cos(x)}{1 + \sin^2(x)}$

Calculer $\sum_{k=2}^{23} \sin(k\pi)$ et $\sum_{k=2}^{23} \cos(k\pi)$.

Calculer $\sum_{k=2}^{23} \sin(k\pi)$ et $\sum_{k=2}^{23} \cos(k\pi)$.

► $\forall k \in \mathbb{Z}, \sin(k\pi) = 0$ donc $\sum_{k=2}^{23} \sin(k\pi) = 0$.

Calculer $\sum_{k=2}^{23} \sin(k\pi)$ et $\sum_{k=2}^{23} \cos(k\pi)$.

▶ $\forall k \in \mathbb{Z}, \sin(k\pi) = 0$ donc $\sum_{k=2}^{23} \sin(k\pi) = 0$.

▶ $\forall k \in \mathbb{Z}, \cos(k\pi) = (-1)^k$ donc

$$\sum_{k=2}^{23} \cos(k\pi) = \sum_{k=1}^{11} \cos(2k\pi) + \cos((2k+1)\pi) = 0$$