

Automatismes en calcul, semaine du 17 mars

17 mars 2025

a) Résoudre $(5 + i)z^2 + 4z + 1 = 0$

b) Trouver a et b tq $a + b = 5$ et $ab = 2$

a) Résoudre $(5 + i)z^2 + 4z + 1 = 0$

b) Trouver a et b tq $a + b = 5$ et $ab = 2$

a) $\Delta = -4(1 + i) = -4\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ donc on prend $\delta = i2\sqrt{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{8}}$ et les solutions de l'équation sont :

$$\frac{-4 + \delta}{2(5 + i)} \quad \text{et} \quad \frac{-4 - \delta}{2(5 + i)}$$

a) Résoudre $(5 + i)z^2 + 4z + 1 = 0$

b) Trouver a et b tq $a + b = 5$ et $ab = 2$

a) $\Delta = -4(1 + i) = -4\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ donc on prend $\delta = i2\sqrt{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{8}}$ et les solutions de l'équation sont :

$$\frac{-4 + \delta}{2(5 + i)} \quad \text{et} \quad \frac{-4 - \delta}{2(5 + i)}$$

b) a et b sont les racines de

$$P = (X - a)(X - b) = X^2 - (a + b)X + ab = X^2 - 5X + 2$$

On en déduit que $\{a; b\} = \left\{ \frac{5 \pm \sqrt{17}}{2} \right\}$

a) Factoriser $\sin(3x) - \sin(5x)$.

b) Linéariser $\cos^3(2x) \cos(3x)$.

a) Factoriser $\sin(3x) - \sin(5x)$.

b) Linéariser $\cos^3(2x) \cos(3x)$.

a)
$$\begin{aligned}\sin(3x) - \sin(5x) &= \operatorname{Im}(e^{4ix-ix} - e^{4ix+ix}) = \operatorname{Im}(-2i \sin(x)e^{4ix}) \\ &= -2 \sin(x) \cos(4x)\end{aligned}$$

a) Factoriser $\sin(3x) - \sin(5x)$.

b) Linéariser $\cos^3(2x) \cos(3x)$.

$$\begin{aligned} \text{a) } \sin(3x) - \sin(5x) &= \operatorname{Im}(e^{4ix-ix} - e^{4ix+ix}) = \operatorname{Im}(-2i \sin(x)e^{4ix}) \\ &= -2 \sin(x) \cos(4x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \cos^3(2x) \cos(3x) &= \left(\frac{e^{i2x} + e^{-i2x}}{2} \right)^3 \frac{e^{i3x} + e^{-i3x}}{2} \\ &= \frac{1}{16} (e^{i6x} + 3e^{i2x} + 3e^{-i2x} + e^{-i6x})(e^{i3x} + e^{-i3x}) \\ &= \frac{1}{16} (2 \cos(9x) + 2 \cos(3x) + 6 \cos(5x) + 6 \cos(x)) \\ &= \frac{1}{8} (\cos(9x) + \cos(3x) + 3 \cos(5x) + 3 \cos(x)) \end{aligned}$$

a) Factoriser $\sin(3x) - \sin(5x)$.

b) Linéariser $\cos^3(2x) \cos(3x)$.

$$\begin{aligned} \text{a) } \sin(3x) - \sin(5x) &= \operatorname{Im}(e^{4ix-ix} - e^{4ix+ix}) = \operatorname{Im}(-2i \sin(x)e^{4ix}) \\ &= -2 \sin(x) \cos(4x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \cos^3(2x) \cos(3x) &= \left(\frac{e^{i2x} + e^{-i2x}}{2} \right)^3 \frac{e^{i3x} + e^{-i3x}}{2} \\ &= \frac{1}{16} (e^{i6x} + 3e^{i2x} + 3e^{-i2x} + e^{-i6x})(e^{i3x} + e^{-i3x}) \\ &= \frac{1}{16} (2 \cos(9x) + 2 \cos(3x) + 6 \cos(5x) + 6 \cos(x)) \\ &= \frac{1}{8} (\cos(9x) + \cos(3x) + 3 \cos(5x) + 3 \cos(x)) \end{aligned}$$

Qu'a-t-on oublié ?

Ecrire sous la forme d'une seule fonction trigo $3 \cos(2x) - 5 \sin(2x)$.

Ecrire sous la forme d'une seule fonction trigo $3 \cos(2x) - 5 \sin(2x)$.

Il faut faire apparaître une formule $\cos(a) \cos(b) \pm \sin(a) \sin(b)$.

Ecrire sous la forme d'une seule fonction trigo $3 \cos(2x) - 5 \sin(2x)$.

Il faut faire apparaître une formule $\cos(a) \cos(b) \pm \sin(a) \sin(b)$.

$$3^2 + 5^2 = 34 \text{ donc } \left(\frac{3}{\sqrt{34}}\right)^2 + \left(\frac{5}{\sqrt{34}}\right)^2 = 1$$

$$\text{Il existe } \theta \text{ tel que } \cos(\theta) = \frac{3}{\sqrt{34}} \text{ et } \sin(\theta) = \frac{5}{\sqrt{34}}$$

Ecrire sous la forme d'une seule fonction trigo $3 \cos(2x) - 5 \sin(2x)$.

Il faut faire apparaître une formule $\cos(a) \cos(b) \pm \sin(a) \sin(b)$.

$$3^2 + 5^2 = 34 \text{ donc } \left(\frac{3}{\sqrt{34}}\right)^2 + \left(\frac{5}{\sqrt{34}}\right)^2 = 1$$

$$\text{Il existe } \theta \text{ tel que } \cos(\theta) = \frac{3}{\sqrt{34}} \text{ et } \sin(\theta) = \frac{5}{\sqrt{34}}$$

$$\begin{aligned} 3 \cos(2x) - 5 \sin(2x) &= \sqrt{34}(\cos(\theta) \cos(2x) - \sin(\theta) \sin(2x)) \\ &= \sqrt{34} \cos(2x + \theta). \end{aligned}$$

Ecrire sous la forme d'une seule fonction trigo $3 \cos(2x) - 5 \sin(2x)$.

Il faut faire apparaître une formule $\cos(a) \cos(b) \pm \sin(a) \sin(b)$.

$$3^2 + 5^2 = 34 \text{ donc } \left(\frac{3}{\sqrt{34}}\right)^2 + \left(\frac{5}{\sqrt{34}}\right)^2 = 1$$

$$\text{Il existe } \theta \text{ tel que } \cos(\theta) = \frac{3}{\sqrt{34}} \text{ et } \sin(\theta) = \frac{5}{\sqrt{34}}$$

$$\begin{aligned} 3 \cos(2x) - 5 \sin(2x) &= \sqrt{34}(\cos(\theta) \cos(2x) - \sin(\theta) \sin(2x)) \\ &= \sqrt{34} \cos(2x + \theta). \end{aligned}$$

Une valeur possible pour θ ?