Automatismes en calcul, semaine du 18 mai

17 mai 2026

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_3[X])$ tq $P \mapsto P + (1 - X)P'$.
Déterminer des bases de $\mathrm{Im}(f)$ et de $\ker(f)$.

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_3[X])$ tq $P \mapsto P + (1 - X)P'$.
Déterminer des bases de $\mathrm{Im}(f)$ et de $\ker(f)$.

Pour commencer, il faut bien comprendre qu'avec le th. du rang, on aura une part de la 2è réponse avec la 1ère.

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_3[X])$ tq $P \mapsto P + (1 - X)P'$.
Déterminer des bases de $\mathrm{Im}(f)$ et de $\ker(f)$.

Une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$ est $(f(1), f(X), f(X^2), f(X^3)) = (1, 1, 2X - X^2, 3X^2 - 2X^3)$ on en déduit qu'une base de $\mathrm{Im}(f)$ est $(1, 2X - X^2, 3X^2 - 2X^3)$.

Le th. du rang permet d'annoncer que $\dim(\ker(f)) = 1$. Pour avoir une base de $\ker(f)$ il suffit donc d'en donner un vecteur non nul.

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_3[X])$ tq $P \mapsto P + (1-X)P'$.
Déterminer des bases de $\mathrm{Im}(f)$ et de $\ker(f)$.

Une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$ est $(f(1), f(X), f(X^2), f(X^3)) = (1, 1, 2X - X^2, 3X^2 - 2X^3)$ on en déduit qu'une base de $\mathrm{Im}(f)$ est $(1, 2X - X^2, 3X^2 - 2X^3)$.

Le th. du rang permet d'annoncer que $\dim(\ker(f)) = 1$. Pour avoir une base de $\ker(f)$ il suffit donc d'en donner un vecteur non nul.

D'après ce qu'on a vu, $X - 1 \in \ker(f)$, une base de $\ker(f)$ est donc $(X-1)$.

$$\sum \left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{2n^{\frac{3}{2}}} \quad ; \quad \sum \operatorname{Arctan}\left(\frac{n+1}{2-n^3}\right) \quad ; \quad \sum \frac{3^n}{(n+1)!}$$

$$\sum \left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{2n^{\frac{3}{2}}} \quad ; \quad \sum \operatorname{Arctan}\left(\frac{n+1}{2-n^3}\right) \quad ; \quad \sum \frac{3^n}{(n+1)!}$$

- $\forall n,\ \left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{2n^{\frac{3}{2}}} \geq 1$ donc la série $\sum \left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{2n^{\frac{3}{2}}}$ DVG.

$$\sum \left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{2n^{\frac{3}{2}}} \quad ; \quad \sum \operatorname{Arctan}\left(\frac{n+1}{2-n^3}\right) \quad ; \quad \sum \frac{3^n}{(n+1)!}$$

- $\forall n,\ \left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{2n^{\frac{3}{2}}} \geq 1$ donc la série $\sum \left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{2n^{\frac{3}{2}}}$ DVG.
- $\operatorname{Arctan}\left(\frac{n+1}{2-n^3}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \operatorname{Arctan}\left(-\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$

$$\underset{n\to+\infty}{=} -\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{n^2}.$$

La série CV par comparaison de séries à termes de signes constants.

$$\sum \left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{2n^{\frac{3}{2}}} \quad ; \quad \sum \operatorname{Arctan}\left(\frac{n+1}{2-n^3}\right) \quad ; \quad \sum \frac{3^n}{(n+1)!}$$

- $\forall n,\ \left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{2n^{\frac{3}{2}}} \geq 1$ donc la série $\sum \left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{2n^{\frac{3}{2}}}$ DVG.
- $\operatorname{Arctan}\left(\frac{n+1}{2-n^3}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \operatorname{Arctan}\left(-\frac{1}{n^2}+o(\frac{1}{n^2})\right)$

$$\underset{n\to+\infty}{=} -\frac{1}{n^2}+o(\frac{1}{n^2}) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{n^2}.$$

La série CV par comparaison de séries à termes de signes constants.

- $\forall n,\ 0<\dfrac{3^n}{(n+1)!}<\dfrac{3^n}{n!}$ donc la série converge par comparaison à la série exponentielle.

$$\sum \left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{2n^{\frac{3}{2}}} \quad ; \quad \sum \mathrm{Arctan}\left(\frac{n+1}{2-n^3}\right) \quad ; \quad \sum \frac{3^n}{(n+1)!}$$

- $\forall n,\ \left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{2n^{\frac{3}{2}}} \geq 1$ donc la série $\sum \left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{2n^{\frac{3}{2}}}$ DVG.
- $\mathrm{Arctan}\left(\frac{n+1}{2-n^3}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{Arctan}\left(-\frac{1}{n^2}+o(\frac{1}{n^2})\right)$

$$\underset{n\to+\infty}{=} -\frac{1}{n^2}+o(\frac{1}{n^2}) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{n^2}.$$

La série CV par comparaison de séries à termes de signes constants.

- $\forall n,\ 0 < \dfrac{3^n}{(n+1)!} < \dfrac{3^n}{n!}$ donc la série converge par comparaison à la série exponentielle.

On peut calculer la somme de cette dernière série. Comment ?

$$\sum \left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{2n^{\frac{3}{2}}} \quad ; \quad \sum \operatorname{Arctan}\left(\frac{n+1}{2-n^3}\right) \quad ; \quad \sum \frac{3^n}{(n+1)!}$$

- $\forall n,\ \left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{2n^{\frac{3}{2}}} \geq 1$ donc la série $\sum \left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{2n^{\frac{3}{2}}}$ DVG.
- $\operatorname{Arctan}\left(\frac{n+1}{2-n^3}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \operatorname{Arctan}\left(-\frac{1}{n^2}+o(\frac{1}{n^2})\right)$

$$\underset{n\to+\infty}{=} -\frac{1}{n^2}+o(\frac{1}{n^2}) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{n^2}.$$

La série CV par comparaison de séries à termes de signes constants.

- $\forall n,\ 0 < \dfrac{3^n}{(n+1)!} < \dfrac{3^n}{n!}$ donc la série converge par comparaison à la série exponentielle.

On peut calculer la somme de cette dernière série. Comment ?

$$\forall N,\ \sum_{n=0}^{N} \frac{3^n}{(n+1)!} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{N} \frac{3^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{N+1} \frac{3^n}{n!} \longrightarrow \frac{1}{3}(\mathrm{e}^3-1).$$

$$\sum \frac{3^{n+1}-2}{5^n} \qquad ; \qquad \sum \ln\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)$$

$$\sum \frac{3^{n+1}-2}{5^n} \qquad ; \qquad \sum \ln\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)$$

- $\frac{3^{n+1}-2}{5^n} \sim 3\left(\frac{3}{5}\right)^n$ est le terme général d'une série CV.

$$\sum \frac{3^{n+1}-2}{5^n} \quad ; \quad \sum \ln\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)$$

- $\frac{3^{n+1}-2}{5^n} \sim 3\left(\frac{3}{5}\right)^n$ est le terme général d'une série CV.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^{n+1}-2}{5^n} = 3\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n - 2\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n = 3\frac{1}{1-\frac{3}{5}} - 2\frac{1}{1-\frac{1}{5}} = 5$$

$$\sum \frac{3^{n+1}-2}{5^n} \qquad ; \qquad \sum \ln\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)$$

- $\frac{3^{n+1}-2}{5^n} \sim 3\left(\frac{3}{5}\right)^n$ est le terme général d'une série CV.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^{n+1}-2}{5^n} = 3\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n - 2\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n = 3\frac{1}{1-\frac{3}{5}} - 2\frac{1}{1-\frac{1}{5}} = 5$$

- $\ln\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right) \sim -\frac{1}{n^2}$ donc la série CV.

$$\sum \frac{3^{n+1}-2}{5^n} \quad ; \quad \sum \ln\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)$$

- $\frac{3^{n+1}-2}{5^n} \sim 3\left(\frac{3}{5}\right)^n$ est le terme général d'une série CV.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^{n+1}-2}{5^n} = 3\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n - 2\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n = 3\frac{1}{1-\frac{3}{5}} - 2\frac{1}{1-\frac{1}{5}} = 5$$

- $\ln\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right) \sim -\frac{1}{n^2}$ donc la série CV.

$$\forall N \geq 2,\ \sum_{n=2}^{N} \ln\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right) = \sum_{n=2}^{N} \ln(n+1) + \ln(n-1) - 2\ln(n)$$

$$= \sum_{n=3}^{N+1} \ln(n) + \sum_{n=1}^{N-1} \ln(n) - 2\sum_{n=2}^{N} \ln(n) = \ln(1+\frac{1}{N}) - \ln(2)$$

$$\xrightarrow[n\to+\infty]{} -\ln(2)$$

classes préparatoires scientifiques Lycée Brizeux

Vendredi : Python

Le disque unité est l'ensemble des points $(x; y)$ tq $x^2 + x^2 \leq 1$.

En utilisant la fonction `random.random()` qui renvoie un nombre au hasard dans $[0; 1]$, écrire une fonction qui prend en paramètre un entier n et renvoie, parmi un tirage aléatoire de n points du carré $[-1; 1] \times [-1; 1]$ la proportion de points qui sont dans le disque unité.