

# Automatismes en calcul, semaine du 19 février

18 février 2024

Lundi : développement limité

Mercredi : application des DL

Jeudi : Interrogation de cours

Vendredi : une équation différentielle

Donner le DL d'Arccos à l'ordre 5 en 0.

---

Donner le DL d'Arccos à l'ordre 5 en 0.

---

$$\forall x \in ]-1; 1[, \operatorname{Arccos}'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} = -(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

Donner le DL d'Arccos à l'ordre 5 en 0.

---

$$\forall x \in ]-1; 1[, \operatorname{Arccos}'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} = -(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned} \text{On a donc : } \operatorname{Arccos}'(x) & \underset{x \rightarrow 0}{=} -\left(1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{8}x^4 + o(x^5)\right) \\ & \underset{x \rightarrow 0}{=} -1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + o(x^5) \end{aligned}$$

Donner le DL d'Arccos à l'ordre 5 en 0.

---

$$\forall x \in ]-1; 1[, \operatorname{Arccos}'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} = -(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned} \text{On a donc : } \operatorname{Arccos}'(x) & \underset{x \rightarrow 0}{=} -\left(1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{8}x^4 + o(x^5)\right) \\ & \underset{x \rightarrow 0}{=} -1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + o(x^5) \end{aligned}$$

Puis, en intégrant :

$$\begin{aligned} \operatorname{Arccos}(x) & \underset{x \rightarrow 0}{=} \operatorname{Arccos}(0) - x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + o(x^5) \\ & \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{\pi}{2} - x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + o(x^5) \end{aligned}$$

Déterminer l'asymptote en  $+\infty$  de  $y = \frac{x + 1}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$

---

Déterminer l'asymptote en  $+\infty$  de  $y = \frac{x+1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$

---

On pose  $x = \frac{1}{h}$  et on a :  $\frac{x+1}{1+e^{\frac{1}{x}}} = \frac{\frac{1}{h}+1}{1+e^h} = \left(\frac{1}{h}+1\right) \times \frac{1}{1+e^h}$



Déterminer l'asymptote en  $+\infty$  de  $y = \frac{x+1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$

---

On pose  $x = \frac{1}{h}$  et on a :  $\frac{x+1}{1+e^{\frac{1}{x}}} = \frac{\frac{1}{h}+1}{1+e^h} = \left(\frac{1}{h}+1\right) \times \frac{1}{1+e^h}$

On calcule les DL :

$1+e^h \underset{h \rightarrow 0}{=} 1+1+h+o(h) \underset{h \rightarrow 0}{=} 2+h+o(h)$  donc :

$\frac{1}{1+e^h} \underset{h \rightarrow 0}{=} \frac{1}{2} \times \frac{1}{1+\frac{h}{2}+o(h)} \underset{h \rightarrow 0}{=} \frac{1}{2}(1-\frac{h}{2}+o(h)) \underset{h \rightarrow 0}{=} \frac{1}{2} - \frac{h}{4} + o(h)$

$\left(\frac{1}{h}+1\right) \times \frac{1}{1+e^h} \underset{h \rightarrow 0}{=} \left(\frac{1}{h}+1\right) \times \left(\frac{1}{2} - \frac{h}{4} + o(h)\right) \underset{h \rightarrow 0}{=} \frac{1}{2h} + \frac{1}{4} + o(1)$

Soit  $\frac{x+1}{1+e^{\frac{1}{x}}} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \frac{x}{2} + \frac{1}{4} + o(1)$ . L'asymptote est  $y = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}$ .

Déterminer l'asymptote en  $+\infty$  de  $y = \frac{x+1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$

---

On pose  $x = \frac{1}{h}$  et on a :  $\frac{x+1}{1+e^{\frac{1}{x}}} = \frac{\frac{1}{h}+1}{1+e^h} = \left(\frac{1}{h}+1\right) \times \frac{1}{1+e^h}$

On calcule les DL :

$1+e^h \underset{h \rightarrow 0}{=} 1+1+h+o(h) \underset{h \rightarrow 0}{=} 2+h+o(h)$  donc :

$\frac{1}{1+e^h} \underset{h \rightarrow 0}{=} \frac{1}{2} \times \frac{1}{1+\frac{h}{2}+o(h)} \underset{h \rightarrow 0}{=} \frac{1}{2}(1-\frac{h}{2}+o(h)) \underset{h \rightarrow 0}{=} \frac{1}{2} - \frac{h}{4} + o(h)$

$\left(\frac{1}{h}+1\right) \times \frac{1}{1+e^h} \underset{h \rightarrow 0}{=} \left(\frac{1}{h}+1\right) \times \left(\frac{1}{2} - \frac{h}{4} + o(h)\right) \underset{h \rightarrow 0}{=} \frac{1}{2h} + \frac{1}{4} + o(1)$

Soit  $\frac{x+1}{1+e^{\frac{1}{x}}} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \frac{x}{2} + \frac{1}{4} + o(1)$ . L'asymptote est  $y = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}$ .

Comment avoir les positions relatives des deux courbes ?

Et demain, c'est les vacances !

Résoudre  $S'' + S' + S = e^x$  avec  $S(0) = 1$  et  $S'(0) = 0$ .

---

Résoudre  $S'' + S' + S = e^x$  avec  $S(0) = 1$  et  $S'(0) = 0$ .

---

C'est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants.

Résoudre  $S'' + S' + S = e^x$  avec  $S(0) = 1$  et  $S'(0) = 0$ .

---

C'est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants.

Son équation caractéristique est  $r^2 + r + 1 = 0$  qui a pour solutions  $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$  et  $\bar{j}$ .

Résoudre  $S'' + S' + S = e^x$  avec  $S(0) = 1$  et  $S'(0) = 0$ .

---

C'est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants.

Son équation caractéristique est  $r^2 + r + 1 = 0$  qui a pour solutions  $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$  et  $\bar{j}$ .

Les solutions de l'équation homogène sont donc de la forme  $y_h(x) = e^{-\frac{x}{2}}(\lambda \cos(\frac{\sqrt{3}x}{2}) + \mu \sin(\frac{\sqrt{3}x}{2}))$ .

Résoudre  $S'' + S' + S = e^x$  avec  $S(0) = 1$  et  $S'(0) = 0$ .

---

C'est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants.

Son équation caractéristique est  $r^2 + r + 1 = 0$  qui a pour solutions  $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$  et  $\bar{j}$ .

Les solutions de l'équation homogène sont donc de la forme

$$y_h(x) = e^{-\frac{x}{2}} \left( \lambda \cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) + \mu \sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) \right).$$

$\frac{e^x}{3}$  est solution particulière, les solutions de l'équation  $S'' + S' + S = e^x$  sont de la forme :

$$y(x) = e^{-\frac{x}{2}} \left( \lambda \cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) + \mu \sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) \right) + \frac{1}{3}e^x$$



Résoudre  $S'' + S' + S = e^x$  avec  $S(0) = 1$  et  $S'(0) = 0$ .

---

C'est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants.

Son équation caractéristique est  $r^2 + r + 1 = 0$  qui a pour solutions  $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$  et  $\bar{j}$ .

Les solutions de l'équation homogène sont donc de la forme

$$y_h(x) = e^{-\frac{x}{2}} \left( \lambda \cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) + \mu \sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) \right).$$

$\frac{e^x}{3}$  est solution particulière, les solutions de l'équation  $S'' + S' + S = e^x$  sont de la forme :

$$y(x) = e^{-\frac{x}{2}} \left( \lambda \cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) + \mu \sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) \right) + \frac{1}{3}e^x$$

Les CI donnent  $\lambda = \frac{2}{3}$  et  $\mu = 0$ .