

Automatismes en calcul, semaine du 20 novembre

24 novembre 2023

- ▶ Mettre sous forme exponentielle $z = -3i + 7$.

- ▶ Trouver une racine carrée de $-3i + 7$.

- ▶ Donner les racines 5^è de -32 ?

- ▶ Mettre sous forme exponentielle $z = -3i + 7$.

$$|z| = \sqrt{7^2 + (-3)^2} = \sqrt{58} \text{ donc } z = \sqrt{58} \left(\underbrace{\frac{7}{\sqrt{58}} + i \frac{-3}{\sqrt{58}}}_{\text{module 1, 4e quadrant}} \right)$$

$$\text{Soit } z = \sqrt{58} e^{i \operatorname{Arctan}\left(\frac{-3}{7}\right)}$$

- ▶ Trouver une racine carrée de $-3i + 7$.

- ▶ Donner les racines 5^è de -32 ?

- ▶ Mettre sous forme exponentielle $z = -3i + 7$.

$$|z| = \sqrt{7^2 + (-3)^2} = \sqrt{58} \text{ donc } z = \sqrt{58} \left(\underbrace{\frac{7}{\sqrt{58}} + i \frac{-3}{\sqrt{58}}}_{\text{module 1, 4e quadrant}} \right)$$

$$\text{Soit } z = \sqrt{58} e^{i \operatorname{Arctan}\left(\frac{-3}{7}\right)}$$

- ▶ Trouver une racine carrée de $-3i + 7$.

$$-3i + 7 = \sqrt{58} e^{i \operatorname{Arctan}\left(\frac{-3}{7}\right)} \text{ donc } \delta = \sqrt[4]{58} e^{i \frac{1}{2} \operatorname{Arctan}\left(\frac{-3}{7}\right)}$$

convient.

- ▶ Donner les racines 5^è de -32 ?

- ▶ Mettre sous forme exponentielle $z = -3i + 7$.

$$|z| = \sqrt{7^2 + (-3)^2} = \sqrt{58} \text{ donc } z = \sqrt{58} \left(\underbrace{\frac{7}{\sqrt{58}} + i \frac{-3}{\sqrt{58}}}_{\text{module 1, 4e quadrant}} \right)$$

$$\text{Soit } z = \sqrt{58} e^{i \operatorname{Arcsin}\left(\frac{-3}{\sqrt{58}}\right)}$$

- ▶ Trouver une racine carrée de $-3i + 7$.

$$-3i + 7 = \sqrt{58} e^{i \operatorname{Arcsin}\left(\frac{-3}{\sqrt{58}}\right)} \text{ donc } \delta = \sqrt[4]{58} e^{i \frac{1}{2} \operatorname{Arcsin}\left(\frac{-3}{\sqrt{58}}\right)}$$

convient.

- ▶ Donner les racines 5è de -32 ?

$$-2 \text{ en est une. Soit } \omega = e^{i \frac{2\pi}{5}}, \text{ les cinq racines 5è de } -32 \text{ sont } (-2) \times \omega^k \text{ avec } k \in \llbracket 1; 5 \rrbracket.$$

▶ Calculer $\binom{12}{9}$.

▶ Exprimer $\binom{n}{n-3}$ en fonction de l'entier $n \geq 3$.

▶ Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $\frac{1}{n!} - \frac{n}{(n+1)!}$.

- ▶ Calculer $\binom{12}{9}$.

$$\binom{12}{9} = \frac{12!}{9! \times 3!} = \frac{12 \times 11 \times 10}{3 \times 2} = 220.$$

- ▶ Exprimer $\binom{n}{n-3}$ en fonction de l'entier $n \geq 3$.

- ▶ Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $\frac{1}{n!} - \frac{n}{(n+1)!}$.

- Calculer $\binom{12}{9}$.

$$\binom{12}{9} = \frac{12!}{9! \times 3!} = \frac{12 \times 11 \times 10}{3 \times 2} = 220.$$

- Exprimer $\binom{n}{n-3}$ en fonction de l'entier $n \geq 3$.

$$\binom{n}{n-3} = \frac{n!}{(n-3)!3!} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}.$$

- Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $\frac{1}{n!} - \frac{n}{(n+1)!}$.

- Calculer $\binom{12}{9}$.

$$\binom{12}{9} = \frac{12!}{9! \times 3!} = \frac{12 \times 11 \times 10}{3 \times 2} = 220.$$

- Exprimer $\binom{n}{n-3}$ en fonction de l'entier $n \geq 3$.

- Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $\frac{1}{n!} - \frac{n}{(n+1)!}$.

$$\frac{1}{n!} - \frac{n}{(n+1)!} = \frac{n+1-n}{(n+1)!} = \frac{1}{(n+1)!}.$$

- ▶ Calculer la norme de $\vec{u} = (3; 4; -5)$
- ▶ Donner un vecteur colinéaire et un vecteur orthogonal à $\vec{u} = (3; 4; -5)$.
- ▶ Les vecteurs $\vec{u} = (1; 2; 3)$, $\vec{v} = (2; 3; 4)$ et $\vec{w} = (3; 4; 5)$ sont-ils coplanaires ?

- ▶ Calculer la norme de $\vec{u} = (3; 4; -5)$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{3^2 + 4^2 + (-5)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}.$$

- ▶ Donner un vecteur colinéaire et un vecteur orthogonal à $\vec{u} = (3; 4; -5)$.

- ▶ Les vecteurs $\vec{u} = (1; 2; 3)$, $\vec{v} = (2; 3; 4)$ et $\vec{w} = (3; 4; 5)$ sont-ils coplanaires ?

- ▶ Calculer la norme de $\vec{u} = (3; 4; -5)$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{3^2 + 4^2 + (-5)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}.$$

- ▶ Donner un vecteur colinéaire et un vecteur orthogonal à $\vec{u} = (3; 4; -5)$.

$$\vec{v} = 2\vec{u} \text{ et } \vec{w} = (-4; 3; 0) \text{ conviennent}$$

- ▶ Les vecteurs $\vec{u} = (1; 2; 3)$, $\vec{v} = (2; 3; 4)$ et $\vec{w} = (3; 4; 5)$ sont-ils coplanaires ?

- ▶ Calculer la norme de $\vec{u} = (3; 4; -5)$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{3^2 + 4^2 + (-5)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}.$$

- ▶ Donner un vecteur colinéaire et un vecteur orthogonal à $\vec{u} = (3; 4; -5)$.

$\vec{v} = 2\vec{u}$ et $\vec{w} = (-4; 3; 0)$ conviennent

- ▶ Les vecteurs $\vec{u} = (1; 2; 3)$, $\vec{v} = (2; 3; 4)$ et $\vec{w} = (3; 4; 5)$ sont-ils coplanaires ?

Ils le sont ssi il existe x et y tels que $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$.

Cette équation vectorielle correspond à un système de trois équations à deux inconnues qui, après calculs, a pour solution $(x; y) = (-1; 2)$. Les vecteurs sont donc coplanaires.

- ▶ En se servant des valeurs remarquables, calculer $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.
- ▶ Exprimer $\cos(3x)$ en fonction de $\cos(x)$.
- ▶ Résoudre dans \mathbb{R} , $|\sin(x)| < \frac{1}{2}$.

- ▶ En se servant des valeurs remarquables, calculer $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.

$$\frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} \text{ donc } \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

- ▶ Exprimer $\cos(3x)$ en fonction de $\cos(x)$.

- ▶ Résoudre dans \mathbb{R} , $|\sin(x)| < \frac{1}{2}$.

- ▶ En se servant des valeurs remarquables, calculer $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.

$$\frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} \text{ donc } \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

- ▶ Exprimer $\cos(3x)$ en fonction de $\cos(x)$.

$\forall x \in \mathbb{R}, \cos(3x) = \operatorname{Re}((e^{ix})^3) = 4 \cos(x)^3 - 3 \cos(x)$ après avoir utilisé $\sin^2 = 1 - \cos^2$.

- ▶ Résoudre dans $\mathbb{R}, |\sin(x)| < \frac{1}{2}$.

- ▶ En se servant des valeurs remarquables, calculer $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.

$$\frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} \text{ donc } \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

- ▶ Exprimer $\cos(3x)$ en fonction de $\cos(x)$.

$\forall x \in \mathbb{R}, \cos(3x) = \operatorname{Re}((e^{ix})^3) = 4 \cos(x)^3 - 3 \cos(x)$ après avoir utilisé $\sin^2 = 1 - \cos^2$.

- ▶ Résoudre dans \mathbb{R} , $|\sin(x)| < \frac{1}{2}$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, |\sin(x)| < \frac{1}{2} \iff -\frac{1}{2} < \sin(x) < \frac{1}{2} \text{ ssi}$$

$$x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(] -\frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{\pi}{6} + 2k\pi [\cup] \frac{5\pi}{6} + 2k\pi; \frac{7\pi}{6} + 2k\pi [\right).$$