Automatismes en calcul, semaine du 22 janvier

21 janvier 2024

classes préparatoires scientifiques Lycée Brizeux

Calculer les sommes suivantes, en fonction de $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{2k+3}{5} \ ; \ \sum_{k=0}^{n} k(k-1) \ ; \ \sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{2k+1}$$

Calculer les sommes suivantes, en fonction de $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{2k+3}{5} \; ; \; \sum_{k=0}^{n} k(k-1) \; ; \; \sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{2k+1}$$

- $$\sum_{k=0}^{n} \frac{2k+3}{5} = \frac{2}{5} \sum_{k=0}^{n} k + \frac{3}{5} \sum_{k=0}^{n} 1 = \frac{2}{5} \frac{n(n+1)}{2} + \frac{3}{5}(n+1)$$

Calculer les sommes suivantes, en fonction de $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{2k+3}{5} \ ; \ \sum_{k=0}^{n} k(k-1) \ ; \ \sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{2k+1}$$

- $$\sum_{k=0}^{n} \frac{2k+3}{5} = \frac{2}{5}\sum_{k=0}^{n} k + \frac{3}{5}\sum_{k=0}^{n} 1 = \frac{2}{5}\frac{n(n+1)}{2} + \frac{3}{5}(n+1)$$

- $$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} k(k-1) &= \sum_{k=0}^{n} k^2 - \sum_{k=0}^{n} k \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{n(n+1)(n-1)}{3}\end{aligned}$$

Calculer les sommes suivantes, en fonction de $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{2k+3}{5} \ ; \ \sum_{k=0}^{n} k(k-1) \ ; \ \sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{2k+1}$$

- $$\sum_{k=0}^{n} \frac{2k+3}{5} = \frac{2}{5}\sum_{k=0}^{n} k + \frac{3}{5}\sum_{k=0}^{n} 1 = \frac{2}{5}\frac{n(n+1)}{2} + \frac{3}{5}(n+1)$$

- $$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} k(k-1) &= \sum_{k=0}^{n} k^2 - \sum_{k=0}^{n} k \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{n(n+1)(n-1)}{3} \end{aligned}$$

- $$\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{2k+1} = \mathrm{e}\sum_{k=0}^{n} (\mathrm{e}^2)^k = \mathrm{e}\frac{1-\mathrm{e}^{2n+2}}{1-\mathrm{e}^2}$$

Inverser $A = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 9 & 8 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Inverser $A = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 9 & 8 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- On trouve $A^{-1} = \frac{1}{38} \begin{pmatrix} 8 & -2 \\ -9 & 7 \end{pmatrix}$.

Inverser $A = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 9 & 8 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- On trouve $A^{-1} = \frac{1}{38} \begin{pmatrix} 8 & -2 \\ -9 & 7 \end{pmatrix}$.
- On trouve $B^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

En se servant des FI de référence calculer :

$$\lim_{n\to+\infty} n\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \qquad ; \qquad \lim_{x\to 0} x^{\sin(x)}$$

---

classes préparatoires scientifiques Lycée Brizeux

En se servant des FI de référence calculer :

$$\lim_{n \to +\infty} n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \qquad ; \qquad \lim_{x \to 0} x^{\sin(x)}$$

- $\displaystyle \lim_{n \to +\infty} n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) = \lim_{n \to +\infty} \pi \frac{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{\pi}{n}} = \pi$ car $\displaystyle \frac{\sin(x)}{x} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 1.$

En se servant des FI de référence calculer :

$$\lim_{n\to+\infty} n\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \qquad ; \qquad \lim_{x\to 0} x^{\sin(x)}$$

- $\lim_{n\to+\infty} n\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \pi\frac{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{\pi}{n}} = \pi$ car $\frac{\sin(x)}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$.
- $\lim_{x\to 0} x^{\sin(x)} = \lim_{x\to 0} \mathrm{e}^{\sin(x)\ln(x)} = \lim_{x\to 0} \mathrm{e}^{\frac{\sin(x)}{x}\times x\ln(x)} = \mathrm{e}^0 = 1$ car $\frac{\sin(x)}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$ et $x\ln(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$.

classes préparatoires scientifiques Lycée Brizeux

Calculer $I_1 = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{Arctan}(x)\mathrm{d}x$ et $I_2 = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{\mathrm{Arcsin}(x)}{1-x^2}}\mathrm{d}x$.

Calculer $I_1 = \int_0^1 \mathrm{Arctan}(x)\mathrm{d}x$ et $I_2 = \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{\mathrm{Arcsin}(x)}{1-x^2}}\mathrm{d}x$.

- Par parties, on trouve $I_1 = \frac{\pi}{4} - \ln(\sqrt{2})$.

Calculer $I_1 = \int_0^1 \mathrm{Arctan}(x)\mathrm{d}x$ et $I_2 = \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{\mathrm{Arcsin}(x)}{1-x^2}}\mathrm{d}x$.

- Par parties, on trouve $I_1 = \frac{\pi}{4} - \ln(\sqrt{2})$.
- Après le changement de variable $\phi(t) = \sin(t)$ on trouve $I_2 = \frac{2}{3}\left(\frac{\pi}{6}\right)^{\frac{3}{2}}$.