

Automatismes en calcul, semaine du 23 mars

28 mars 2026

Lundi : limite

mardi : back to trigo, again !

Mercredi : équation différentielle d'ordre 1 avec variation de la constante.

Vendredi : interro de cours

Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^{\sqrt{n}}$.

Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^{\sqrt{n}}$.

$$\begin{aligned}\left(1 - \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^{\sqrt{n}} &= \exp\left(\sqrt{n} \ln\left(1 - \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right) \\ &\underset{+\infty}{=} \exp\left(\sqrt{n} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right) \\ &\underset{+\infty}{=} \exp\left(\sqrt{n} \times \left(-\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right) \\ &\underset{+\infty}{\sim} \exp\left(-\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) \xrightarrow{+\infty} 0\end{aligned}$$

Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^{\sqrt{n}}$.

$$\begin{aligned}
 \left(1 - \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^{\sqrt{n}} &= \exp\left(\sqrt{n} \ln\left(1 - \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right) \\
 &\underset{+\infty}{=} \exp\left(\sqrt{n} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right) \\
 &\underset{+\infty}{=} \exp\left(\sqrt{n} \times \left(-\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right) \\
 &\underset{+\infty}{\sim} \exp\left(-\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) \xrightarrow{+\infty} 0
 \end{aligned}$$

Des exemples de la FI « 1^∞ » qui tendent vers 1 et $+\infty$?

Ecrire sous la forme d'une seule fonction trigo $3 \cos(2x) - 5 \sin(2x)$.

Ecrire sous la forme d'une seule fonction trigo $3 \cos(2x) - 5 \sin(2x)$.

Il faut faire apparaître une formule $\cos(a) \cos(b) \pm \sin(a) \sin(b)$.

Ecrire sous la forme d'une seule fonction trigo $3 \cos(2x) - 5 \sin(2x)$.

Il faut faire apparaître une formule $\cos(a) \cos(b) \pm \sin(a) \sin(b)$.

$$3^2 + 5^2 = 34 \text{ donc } \left(\frac{3}{\sqrt{34}}\right)^2 + \left(\frac{5}{\sqrt{34}}\right)^2 = 1$$

Il existe θ tel que $\cos(\theta) = \frac{3}{\sqrt{34}}$ et $\sin(\theta) = \frac{5}{\sqrt{34}}$

Ecrire sous la forme d'une seule fonction trigo $3 \cos(2x) - 5 \sin(2x)$.

Il faut faire apparaître une formule $\cos(a) \cos(b) \pm \sin(a) \sin(b)$.

$$3^2 + 5^2 = 34 \text{ donc } \left(\frac{3}{\sqrt{34}}\right)^2 + \left(\frac{5}{\sqrt{34}}\right)^2 = 1$$

$$\text{Il existe } \theta \text{ tel que } \cos(\theta) = \frac{3}{\sqrt{34}} \text{ et } \sin(\theta) = \frac{5}{\sqrt{34}}$$

$$\begin{aligned} 3 \cos(2x) - 5 \sin(2x) &= \sqrt{34}(\cos(\theta) \cos(2x) - \sin(\theta) \sin(2x)) \\ &= \sqrt{34} \cos(2x + \theta). \end{aligned}$$

Ecrire sous la forme d'une seule fonction trigo $3 \cos(2x) - 5 \sin(2x)$.

Il faut faire apparaître une formule $\cos(a) \cos(b) \pm \sin(a) \sin(b)$.

$$3^2 + 5^2 = 34 \text{ donc } \left(\frac{3}{\sqrt{34}}\right)^2 + \left(\frac{5}{\sqrt{34}}\right)^2 = 1$$

$$\text{Il existe } \theta \text{ tel que } \cos(\theta) = \frac{3}{\sqrt{34}} \text{ et } \sin(\theta) = \frac{5}{\sqrt{34}}$$

$$\begin{aligned} 3 \cos(2x) - 5 \sin(2x) &= \sqrt{34}(\cos(\theta) \cos(2x) - \sin(\theta) \sin(2x)) \\ &= \sqrt{34} \cos(2x + \theta). \end{aligned}$$

Une valeur possible pour θ ?

Résoudre $y' - \frac{y}{x} = x^2$ pour $x > 0$.

Résoudre $y' - \frac{y}{x} = x^2$ pour $x > 0$.

Les solutions de l'équation homogène sont les $x \mapsto \lambda x$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$.

Résoudre $y' - \frac{y}{x} = x^2$ pour $x > 0$.

Les solutions de l'équation homogène sont les $x \mapsto \lambda x$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$.

On cherche une solution particulière de la forme $f(x) = \lambda(x)x$ avec $\lambda(x)$ une fonction dérivable. On a :

$$f'(x) - \frac{f(x)}{x} = x^2 \Leftrightarrow \lambda'(x) = x \Leftarrow \lambda(x) = \frac{1}{2}x^2$$

$f(x) = \frac{1}{2}x^3$ est donc une solution particulière.

Résoudre $y' - \frac{y}{x} = x^2$ pour $x > 0$.

Les solutions de l'équation homogène sont les $x \mapsto \lambda x$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$.

On cherche une solution particulière de la forme $f(x) = \lambda(x)x$ avec $\lambda(x)$ une fonction dérivable. On a :

$$f'(x) - \frac{f(x)}{x} = x^2 \Leftrightarrow \lambda'(x) = x \Leftrightarrow \lambda(x) = \frac{1}{2}x^2$$

$f(x) = \frac{1}{2}x^3$ est donc une solution particulière.

La solution générale de l'équation est :

$$y(x) = \lambda x + \frac{1}{2}x^3, \quad \text{pour } x > 0 \text{ et } \lambda \in \mathbb{R}$$

A l'écoute cette semaine : Led Zeppelin

- ▶ Since I've been loving you
- ▶ Kashmir
- ▶ Communication breakdown + Immigrant song
- ▶ Stairway to heaven