Automatismes en calcul, semaine du 25 mars

30 mars 2024

classes préparatoires scientifiques Lycée Brizeux

Lundi : remember ?

Mercredi : Fraction rationnelle

Jeudi : interro de cours

Vendredi : limite

Ecrire sous la forme d'une seule fonction trigo
$-2\cos(3x) - 5\sin(3x)$.

Ecrire sous la forme d'une seule fonction trigo
$-2\cos(3x) - 5\sin(3x)$.

Il faut faire apparaître une formule $\cos(a)\cos(b) \pm \sin(a)\sin(b)$.

Ecrire sous la forme d'une seule fonction trigo
$-2\cos(3x) - 5\sin(3x)$.

Il faut faire apparaître une formule $\cos(a)\cos(b) \pm \sin(a)\sin(b)$.

$(-2)^2 + (-5)^2 = 29$ donc $\left(\frac{-2}{\sqrt{29}}\right)^2 + \left(\frac{-5}{\sqrt{29}}\right)^2 = 1$
Il existe θ tel que $\cos(\theta) = \frac{-2}{\sqrt{29}}$ et $\sin(\theta) = \frac{-5}{\sqrt{29}}$

Ecrire sous la forme d'une seule fonction trigo
$-2\cos(3x) - 5\sin(3x)$.

Il faut faire apparaître une formule $\cos(a)\cos(b) \pm \sin(a)\sin(b)$.

$(-2)^2 + (-5)^2 = 29$ donc $\left(\frac{-2}{\sqrt{29}}\right)^2 + \left(\frac{-5}{\sqrt{29}}\right)^2 = 1$
Il existe θ tel que $\cos(\theta) = \frac{-2}{\sqrt{29}}$ et $\sin(\theta) = \frac{-5}{\sqrt{29}}$

$$\begin{aligned}-2\cos(3x) - 5\sin(3x) &= \sqrt{29}(\cos(\theta)\cos(3x) + \sin(\theta)\sin(3x)) \\ &= \sqrt{29}\cos(3x - \theta).\end{aligned}$$

Ecrire sous la forme d'une seule fonction trigo
$-2\cos(3x) - 5\sin(3x)$.

Il faut faire apparaître une formule $\cos(a)\cos(b) \pm \sin(a)\sin(b)$.

$(-2)^2 + (-5)^2 = 29$ donc $\left(\frac{-2}{\sqrt{29}}\right)^2 + \left(\frac{-5}{\sqrt{29}}\right)^2 = 1$
Il existe θ tel que $\cos(\theta) = \frac{-2}{\sqrt{29}}$ et $\sin(\theta) = \frac{-5}{\sqrt{29}}$

$$\begin{aligned}-2\cos(3x) - 5\sin(3x) &= \sqrt{29}(\cos(\theta)\cos(3x) + \sin(\theta)\sin(3x))\\ &= \sqrt{29}\cos(3x - \theta).\end{aligned}$$

Une valeur possible pour θ ?

Donner toutes les primitives de $f : x \mapsto \dfrac{2x+1}{2x^3-3x^2-x-2}$.

Donner toutes les primitives de $f : x \mapsto \dfrac{2x+1}{2x^3-3x^2-x-2}$.

$2X^3-3X^2-X-2=(X-2)(2X^2+X+1)$ donc f est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ et il existe des réels α, β et γ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{2\},\ f(x)=\frac{\alpha}{x-2}+\frac{\beta x+\gamma}{2x^2+x+1}$$

Donner toutes les primitives de $f : x \mapsto \dfrac{2x+1}{2x^3-3x^2-x-2}$.

$2X^3-3X^2-X-2=(X-2)(2X^2+X+1)$ donc f est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ et il existe des réels α, β et γ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{2\},\ f(x)=\frac{\alpha}{x-2}+\frac{\beta x+\gamma}{2x^2+x+1}$$

Après calculs, on trouve $\alpha=\frac{5}{11}$, $\beta=-\frac{10}{11}$ et $\gamma=-\frac{3}{11}$.

Donner toutes les primitives de $f : x \mapsto \dfrac{2x+1}{2x^3 - 3x^2 - x - 2}$.

$2X^3 - 3X^2 - X - 2 = (X-2)(2X^2 + X + 1)$ donc f est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ et il existe des réels α, β et γ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{2\},\ f(x) = \frac{\alpha}{x-2} + \frac{\beta x + \gamma}{2x^2 + x + 1}$$

Après calculs, on trouve $\alpha = \frac{5}{11}$, $\beta = -\frac{10}{11}$ et $\gamma = -\frac{3}{11}$.

On travaille sur $]2; +\infty[$ ou sur $]-\infty; 2[$, mettons le premier. Une primitive de f est $F(x) = \displaystyle\int_3^x f(t)\mathrm{d}t$. On a :

$$F(x) = \frac{5}{11}\ln(x-2) - \frac{1}{11}\int_3^x \frac{10t-3}{2t^2+t+1}\mathrm{d}t$$

classes préparatoires scientifiques Lycée Brizeux

$$\int_3^x \frac{10t-3}{2t^2+t+1}\mathrm{d}t = \int_3^x \frac{\frac{5}{2}(4t+1)-\frac{11}{2}}{2t^2+t+1}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{5}{2}(\ln(2x^2+x+1)-\ln(13)) - \frac{11}{2}\int_3^x \frac{1}{2t^2+t+1}\mathrm{d}t$$

$$\int_3^x \frac{10t-3}{2t^2+t+1}\mathrm{d}t = \int_3^x \frac{\frac{5}{2}(4t+1)-\frac{11}{2}}{2t^2+t+1}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{5}{2}(\ln(2x^2+x+1)-\ln(13)) - \frac{11}{2}\int_3^x \frac{1}{2t^2+t+1}\mathrm{d}t$$

$$\int_3^x \frac{1}{2t^2+t+1}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_3^x \frac{1}{(t+\frac{1}{4})^2+\frac{7}{16}}\mathrm{d}t \underset{u=t+\frac{1}{4}}{=} \frac{1}{2}\int_{\frac{11}{4}}^{x-\frac{1}{4}} \frac{1}{u^2+\frac{7}{16}}\mathrm{d}u$$

$$\underset{\phi(s)=s\frac{\sqrt{7}}{4}}{=} \frac{2}{\sqrt{7}}\int_{\frac{11}{\sqrt{7}}}^{\frac{4x-1}{\sqrt{7}}} \frac{1}{s^2+1}\mathrm{d}s$$

$$\int_3^x \frac{10t-3}{2t^2+t+1}\mathrm{d}t = \int_3^x \frac{\frac{5}{2}(4t+1)-\frac{11}{2}}{2t^2+t+1}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{5}{2}(\ln(2x^2+x+1)-\ln(13)) - \frac{11}{2}\int_3^x \frac{1}{2t^2+t+1}\mathrm{d}t$$

$$\int_3^x \frac{1}{2t^2+t+1}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_3^x \frac{1}{(t+\frac{1}{4})^2+\frac{7}{16}}\mathrm{d}t \underset{u=t+\frac{1}{4}}{=} \frac{1}{2}\int_{\frac{11}{4}}^{x-\frac{1}{4}} \frac{1}{u^2+\frac{7}{16}}\mathrm{d}u$$

$$\underset{\phi(s)=s\frac{\sqrt{7}}{4}}{=} \frac{2}{\sqrt{7}}\int_{\frac{11}{\sqrt{7}}}^{\frac{4x-1}{\sqrt{7}}} \frac{1}{s^2+1}\mathrm{d}s$$

On rassemble les morceaux : pour $x>2$, les primitives de f sont

$$x \mapsto \frac{5}{11}\ln(x-2) - \frac{5}{22}\ln(2x^2+x+1) + \frac{1}{\sqrt{7}}\mathrm{Arctan}(\frac{4x-1}{\sqrt{7}}) + cte$$

classes préparatoires scientifiques Lycée Brizeux

Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 - \sin(\frac{1}{n^2})\right)^{\sqrt{n}}$.

Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\sin(\frac{1}{n^2})\right)^{\sqrt{n}}$.

$$\begin{aligned}\left(1-\sin(\frac{1}{n^2})\right)^{\sqrt{n}} &= \exp\left(\sqrt{n}\ln(1-\sin(\frac{1}{n^2}))\right)\\ &\underset{+\infty}{=} \exp\left(\sqrt{n}\ln(1-\frac{1}{n^2}+o(\frac{1}{n^2}))\right)\\ &\underset{+\infty}{=} \exp\left(\sqrt{n}\times(-\frac{1}{n^2}+o(\frac{1}{n^2}))\right)\\ &\underset{+\infty}{\sim} \exp\left(-\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)\underset{+\infty}{\longrightarrow} 0\end{aligned}$$

Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\sin(\frac{1}{n^2})\right)^{\sqrt{n}}$.

$$\begin{aligned}\left(1-\sin(\frac{1}{n^2})\right)^{\sqrt{n}} &= \exp\left(\sqrt{n}\ln(1-\sin(\frac{1}{n^2}))\right)\\ &\underset{+\infty}{=} \exp\left(\sqrt{n}\ln(1-\frac{1}{n^2}+o(\frac{1}{n^2}))\right)\\ &\underset{+\infty}{=} \exp\left(\sqrt{n}\times(-\frac{1}{n^2}+o(\frac{1}{n^2}))\right)\\ &\underset{+\infty}{\sim} \exp\left(-\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0\end{aligned}$$

Des exemples de la FI « 1^∞ » qui tendent vers 1 et $+\infty$?

classes préparatoires scientifiques Lycée Brizeux