

Automatismes en calcul, semaine du 25 novembre

30 novembre 2024

▶ $f(x) = \cos(x^2)e^{3x+1}$

▶ $g(x) = \sin(\ln(1 - x^2))$

▶ $h(x) = x^{\text{Arcsin}(x)}$

▶ $f(x) = \cos(x^2)e^{3x+1}$

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = e^{3x+1}(3 \cos(x^2) - 2x \sin(x^2))$$

▶ $g(x) = \sin(\ln(1 - x^2))$

▶ $h(x) = x^{\text{Arcsin}(x)}$

▶ $f(x) = \cos(x^2)e^{3x+1}$

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = e^{3x+1}(3 \cos(x^2) - 2x \sin(x^2))$$

▶ $g(x) = \sin(\ln(1 - x^2))$

$$\forall x \in]-1; 1[, g'(x) = \cos(\ln(1 - x^2)) \times \frac{-2x}{1-x^2}$$

▶ $h(x) = x^{\text{Arcsin}(x)}$

▶ $f(x) = \cos(x^2)e^{3x+1}$

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = e^{3x+1}(3 \cos(x^2) - 2x \sin(x^2))$$

▶ $g(x) = \sin(\ln(1 - x^2))$

$$\forall x \in]-1; 1[, g'(x) = \cos(\ln(1 - x^2)) \times \frac{-2x}{1-x^2}$$

▶ $h(x) = x^{\text{Arcsin}(x)}$

$$\forall x \in]0; 1], h(x) = e^{\text{Arcsin}(x) \ln(x)} \text{ donc}$$

$$\forall x \in]0; 1[, h'(x) = h(x) \times \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \ln(x) + \frac{\text{Arcsin}(x)}{x} \right)$$

▶ $\ln(x)$

▶ $f(x) = \sqrt{1 + 5x}$

▶ $g(t) = \frac{t}{\sqrt[3]{5 + 2t^2}}$

▶ $\ln(x)$

C'est ultra classique. \ln est continue sur $]0; +\infty[$, une de ses primitives est $F(x) = \int_1^x \ln(t)dt$ et, en intégrant par parties, on a $F(x) = x \ln(x) - x + 1$.

▶ $f(x) = \sqrt{1 + 5x}$ ▶ $g(t) = \frac{t}{\sqrt[3]{5 + 2t^2}}$.

▶ $\ln(x)$

C'est ultra classique. \ln est continue sur $]0; +\infty[$, une de ses primitives est $F(x) = \int_1^x \ln(t)dt$ et, en intégrant par parties, on a $F(x) = x \ln(x) - x + 1$.

▶ $f(x) = \sqrt{1 + 5x}$

$$\forall x \in \left[-\frac{1}{5}; +\infty[, f(x) = (1 + 5x)^{\frac{1}{2}}$$

et donc $F(x) = (1 + 5x)^{\frac{3}{2}} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{5}$ est une primitive de f .

▶ $g(t) = \frac{t}{\sqrt[3]{5 + 2t^2}}$.

▶ $\ln(x)$

C'est ultra classique. \ln est continue sur $]0; +\infty[$, une de ses primitives est $F(x) = \int_1^x \ln(t)dt$ et, en intégrant par parties, on a $F(x) = x \ln(x) - x + 1$.

▶ $f(x) = \sqrt{1 + 5x}$

$$\forall x \in \left[-\frac{1}{5}; +\infty[, f(x) = (1 + 5x)^{\frac{1}{2}}$$

et donc $F(x) = (1 + 5x)^{\frac{3}{2}} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{5}$ est une primitive de f .

▶ $g(t) = \frac{t}{\sqrt[3]{5 + 2t^2}}$.

$$\forall t \in \mathbb{R}, g(t) = (5 + 2t^2)^{-\frac{1}{3}} \times \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} t^2 \right) \text{ et donc}$$

$$G(t) = (5 + 2t^2)^{\frac{2}{3}} \times \frac{3}{2} \times \frac{1}{4} \text{ est une primitive de } g.$$

$$\text{Résoudre } 3y' - 2y = x^2.$$

Résoudre $3y' - 2y = x^2$.

Les solutions de (E_h) sont les $x \mapsto \lambda e^{\frac{2}{3}x}$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$.

Résoudre $3y' - 2y = x^2$.

Les solutions de (E_h) sont les $x \mapsto \lambda e^{\frac{2}{3}x}$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$.

On cherche une solution particulière de la forme

$f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $(a; b; c) \in \mathbb{R}^3$. On a :

$$3f'(x) - 2f(x) = x^2 \Leftrightarrow 3(2ax + b) - 2(ax^2 + bx + c) = x^2$$

ce qui donne le système
$$\begin{cases} -2a = 1 \\ 6a - 2b = 0 \\ 3b - 2c = 0 \end{cases} .$$

Sa solution est $(-\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}; -\frac{9}{4})$ et donc $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{9}{4}$ est une solution particulière.

Résoudre $3y' - 2y = x^2$.

Les solutions de (E_h) sont les $x \mapsto \lambda e^{\frac{2}{3}x}$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$.

On cherche une solution particulière de la forme

$f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $(a; b; c) \in \mathbb{R}^3$. On a :

$$3f'(x) - 2f(x) = x^2 \Leftrightarrow 3(2ax + b) - 2(ax^2 + bx + c) = x^2$$

ce qui donne le système
$$\begin{cases} -2a = 1 \\ 6a - 2b = 0 \\ 3b - 2c = 0 \end{cases} .$$

Sa solution est $(-\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}; -\frac{9}{4})$ et donc $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{9}{4}$ est une solution particulière.

La solution générale de l'équation est :

$$y(x) = \lambda e^{\frac{2}{3}x} - \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{9}{4}, \quad (\text{avec } \lambda \in \mathbb{R})$$