Automatismes en calcul, semaine du 25 septembre

24 septembre 2023

Factoriser le polynôme $P = X^3 + 3X^2 - 2X - 4$.

Factoriser le polynôme $P = X^3 + 3X^2 - 2X - 4$.

$P(-1) = 0$: -1 est racine de P donc on peut factoriser P par $X - (-1) = X + 1$ et on a :

Factoriser le polynôme $P = X^3 + 3X^2 - 2X - 4$.

$P(-1) = 0$: -1 est racine de P donc on peut factoriser P par $X - (-1) = X + 1$ et on a :

$$X^3 + 3X^2 - 2X - 4 = (X+1)(\dots X^2 + \dots X + \dots)$$

Factoriser le polynôme $P = X^3 + 3X^2 - 2X - 4$.

$P(-1) = 0$: -1 est racine de P donc on peut factoriser P par $X - (-1) = X + 1$ et on a :

$$X^3 + 3X^2 - 2X - 4 = (X+1)(X^2 + 2X + (-4))$$

Trouver les coefficients ? de tête, un système ou poser la division euclidienne.

Factoriser le polynôme $P = X^3 + 3X^2 - 2X - 4$.

$P(-1) = 0$: -1 est racine de P donc on peut factoriser P par $X - (-1) = X + 1$ et on a :

$$X^3 + 3X^2 - 2X - 4 = (X+1)(X^2 + 2X + (-4))$$

Trouver les coefficients ? de tête, un système ou poser la division euclidienne.

On a fini ?

Factoriser le polynôme $P = X^3 + 3X^2 - 2X - 4$.

$P(-1) = 0$: -1 est racine de P donc on peut factoriser P par $X - (-1) = X + 1$ et on a :

$$X^3 + 3X^2 - 2X - 4 = (X+1)(X^2 + 2X + (-4))$$

Trouver les coefficients ? de tête, un système ou poser la division euclidienne.

$$\begin{aligned} X^2 + 2X + (-4) &= X^2 + 2X + 1 - 5 = (X+1)^2 - 5 \\ &= (X + 1 + \sqrt{5})(X + 1 - \sqrt{5}) \end{aligned}$$

Finalement :

$$\boxed{P = (X+1)(X + 1 + \sqrt{5})(X + 1 - \sqrt{5})}$$

CPGE Brizeux Quimper

Dans le plan complexe, on considère les points $A(1+2i)$ et $B(-3i)$. Déterminer les points C tels que ABC soit rectangle en C.

Dans le plan complexe, on considère les points $A(1+2i)$ et $B(-3i)$. Déterminer les points C tels que ABC soit rectangle en C.

Une idée toujours bonne est de commencer par...

Dans le plan complexe, on considère les points $A(1+2i)$ et $B(-3i)$. Déterminer les points C tels que ABC soit rectangle en C.

On cherche les points du cercle de diamètre $[AB]$.

Notons $z_C = x + iy$.

ABC est rectangle en C ssi $AC^2 + BC^2 = AB^2 \ : \ (\star)$. On a :
$AC^2 = |z_C - z_A|^2 = |x + iy - (1+2i)|^2 = (x-1)^2 + (y-2)^2$
$BC^2 = x^2 + (y+3)^2$ et $AB^2 = 26$.

Il suit : $(\star) \iff (x-1)^2 + (y-2)^2 + x^2 + (y+3)^2 = 26$

$\iff x^2 - x + y^2 + y = 6 \iff \boxed{(x - \frac{1}{2})^2 + (y + \frac{1}{2})^2 = \frac{13}{2}}$

Dans le plan complexe, on considère les points $A(1+2i)$ et $B(-3i)$. Déterminer les points C tels que ABC soit rectangle en C.

On cherche les points du cercle de diamètre $[AB]$.

Notons $z_C = x + iy$.

ABC est rectangle en C ssi $AC^2 + BC^2 = AB^2 \;:\; (\star)$. On a :
$AC^2 = |z_C - z_A|^2 = |x + iy - (1+2i)|^2 = (x-1)^2 + (y-2)^2$
$BC^2 = x^2 + (y+3)^2$ et $AB^2 = 26$.

Il suit : $(\star) \iff (x-1)^2 + (y-2)^2 + x^2 + (y+3)^2 = 26$

$\iff x^2 - x + y^2 + y = 6 \iff \boxed{(x - \frac{1}{2})^2 + (y + \frac{1}{2})^2 = \frac{13}{2}}$

Où est l'erreur ?

Dans le plan complexe, on considère les points $A(1+2i)$ et $B(-3i)$. Déterminer les points C tels que ABC soit rectangle en C.

On cherche les points du cercle de diamètre $[AB]$.

Notons $z_C = x + iy$.

ABC est rectangle en C ssi $AC^2 + BC^2 = AB^2 \ : \ (\star)$. On a :
$AC^2 = |z_C - z_A|^2 = |x + iy - (1+2i)|^2 = (x-1)^2 + (y-2)^2$
$BC^2 = x^2 + (y+3)^2$ et $AB^2 = 26$.

Il suit : $(\star) \iff (x-1)^2 + (y-2)^2 + x^2 + (y+3)^2 = 26$

$\iff x^2 - x + y^2 + y = 6 \iff \boxed{(x-\frac{1}{2})^2 + (y+\frac{1}{2})^2 = \frac{13}{2}}$

Il faut retirer les points A et B.

CPGE Brizeux Quimper

- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos(2x+1) = \dfrac{1}{2}$.

- Résoudre $\cos(x) > \sin(x)$

- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos(2x+1) = \dfrac{1}{2}$.

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(2x+1) = \frac{1}{2} &\iff 2x+1 \equiv \pm\frac{\pi}{3} \mod 2\pi \\ &\iff x \equiv -\frac{1}{2} \pm \frac{\pi}{6} \mod \pi\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est

$$\boxed{\left\{-\frac{1}{2}+\frac{\pi}{6}+k\pi ; -\frac{1}{2}-\frac{\pi}{6}+k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z}\right\}}$$

- Résoudre $\cos(x) > \sin(x)$

- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos(2x+1) = \dfrac{1}{2}$.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(2x+1) = \frac{1}{2} \iff 2x+1 \equiv \pm\frac{\pi}{3} \mod 2\pi$$
$$\iff x \equiv -\frac{1}{2} \pm \frac{\pi}{6} \mod \pi$$

L'ensemble des solutions est
$$\boxed{\left\{-\frac{1}{2}+\frac{\pi}{6}+k\pi ; -\frac{1}{2}-\frac{\pi}{6}+k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z}\right\}}$$

- Résoudre $\cos(x) > \sin(x)$

L'ensemble des solutions est $\boxed{\displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{3\pi}{4}+2k\pi ; \frac{\pi}{4}+2k\pi\right[}$

- Factoriser $\cos(5x) - \cos(x)$.

- Délinéariser $\cos(3x)$

- Factoriser $\cos(5x) - \cos(x)$.

  Pour $x \in \mathbb{R}$, on a :

  $$\begin{aligned}\cos(5x) - \cos(x) &= \mathrm{Re}(e^{i5x} - e^{ix}) = \mathrm{Re}(e^{i3x}(e^{i2x} - e^{i2x})) \\ &= \mathrm{Re}(e^{i3x} 2i\sin(2x)) \boxed{= -2\sin(2x)\sin(3x)}\end{aligned}$$

- Délinéariser $\cos(3x)$

CPGE Brizeux Quimper

- Factoriser $\cos(5x) - \cos(x)$.

  Pour $x \in \mathbb{R}$, on a :

  $$\begin{aligned}\cos(5x) - \cos(x) &= \mathrm{Re}(e^{i5x} - e^{ix}) = \mathrm{Re}(e^{i3x}(e^{i2x} - e^{i2x})) \\ &= \mathrm{Re}(e^{i3x} 2i \sin(2x)) \boxed{= -2\sin(2x)\sin(3x)}\end{aligned}$$

- Délinéariser $\cos(3x)$

  Pour $x \in \mathbb{R}$, on a :

  $$\cos(3x) = \mathrm{Re}(e^{i3x}) = \mathrm{Re}((e^{ix})^3) = \mathrm{Re}((\cos(x) + i\sin(x))^3)$$
  $$= \mathrm{Re}(\cos(x)^3 + 3\cos(x)^2 i \sin(x) - 3\cos(x)\sin(x)^2 - i\sin(x)^3)$$
  $$\boxed{= \cos(x)^3 - 3\cos(x)\sin(x)^2}$$

CPGE Brizeux Quimper