

Automatismes en calcul, semaine du 26 janvier

25 janvier 2026

$$\text{Calculer } I_1 = \int_0^1 \text{Arctan}(x) dx \text{ et } I_2 = \int_{\ln(2)}^{\ln(4)} \frac{dx}{\sqrt{e^x - 1}}.$$

$$\text{Calculer } I_1 = \int_0^1 \text{Arctan}(x) dx \text{ et } I_2 = \int_{\ln(2)}^{\ln(4)} \frac{dx}{\sqrt{e^x - 1}}.$$

► Par parties, on trouve $I_1 = \frac{\pi}{4} - \ln(\sqrt{2})$.

$$\text{Calculer } I_1 = \int_0^1 \text{Arctan}(x) dx \text{ et } I_2 = \int_{\ln(2)}^{\ln(4)} \frac{dx}{\sqrt{e^x - 1}}.$$

► Par parties, on trouve $I_1 = \frac{\pi}{4} - \ln(\sqrt{2})$.

► En faisant le changement de variable $\varphi(t) = \ln(t^2 + 1)$ on a :

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{t} \frac{2t}{t^2 + 1} dt = 2 \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dt}{t^2 + 1} \\ &= 2 [\text{Arctan}(t)]_1^{\sqrt{3}} = 2 \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) \quad \boxed{= \frac{\pi}{6}} \end{aligned}$$

└ Mercredi : Calculer en fonction de $n \in \mathbb{N}$: $\sum_{1 \leq i, j \leq n} i^2 j$ et $S_n = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} i + j$

$$\begin{aligned}
 \blacktriangleright \sum_{1 \leq i, j \leq n} i^2 j &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n i^2 j = \sum_{i=1}^n i^2 \sum_{j=1}^n j = \sum_{i=1}^n i^2 \frac{n(n+1)}{2} \\
 &= \frac{n(n+1)}{2} \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)}{2} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
 &= \boxed{\frac{n^2(n+1)^2(2n+1)}{12}}
 \end{aligned}$$

└ Mercredi : Calculer en fonction de $n \in \mathbb{N}$: $\sum_{1 \leq i, j \leq n} i^2 j$ et $S_n = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} i + j$

$$\begin{aligned}
 \blacktriangleright \sum_{1 \leq i, j \leq n} i^2 j &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n i^2 j = \sum_{i=1}^n i^2 \sum_{j=1}^n j = \sum_{i=1}^n i^2 \frac{n(n+1)}{2} \\
 &= \frac{n(n+1)}{2} \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)}{2} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
 &= \boxed{\frac{n^2(n+1)^2(2n+1)}{12}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \blacktriangleright S_n &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n i + j = \sum_{i=1}^n i(n-i+1) + \frac{(n+i)(n-i+1)}{2} \\
 &= \sum_{i=1}^n \frac{n(n+1)}{2} + i\left(n + \frac{3}{2}\right) - \frac{3}{2}i^2 \\
 &= \boxed{\frac{n(n+1)^2}{2}} \text{ (après calculs)}
 \end{aligned}$$

Décomposer en éléments simples $f(x) = \frac{x^4}{x^2 - 1}$ puis donner une primitive de f sur $] - 1; 1[$.

A l'écoute cette semaine : Eliott Smith

- ▶ Between the bars + Son of Sam
- ▶ Rose parade + Junk bond trader
- ▶ Angeles + Can't make a sound