

Automatismes en calcul, semaine du 26 mai

25 mai 2025

Déterminer le noyau et l'image de $A = \begin{pmatrix} -15 & 10 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

Déterminer le noyau et l'image de $A = \begin{pmatrix} -15 & 10 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

► $A \sim_L \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ ($L_1 \leftarrow L_1 + 5L_2$) et donc

$$X \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \ker(A) \iff 3x = 2y.$$

$$\text{On déduit } \ker(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$$

Déterminer le noyau et l'image de $A = \begin{pmatrix} -15 & 10 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

► $A \sim_L \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 + 5L_2) \text{ et donc}$

$$X \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \ker(A) \iff 3x = 2y.$$

$$\text{On déduit } \ker(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$$

- $\text{Im}(A)$ est une droite (en vertu ...), on connaît un vecteur non nul de $\text{Im}(A)$:

On en déduit :

Sans calcul, dire si les matrices sont inversibles ($x \in \mathbb{R}^*$).

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ \frac{1}{x} & 1 & x \\ \frac{1}{x^2} & \frac{1}{x} & 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Sans calcul, dire si les matrices sont inversibles ($x \in \mathbb{R}^*$).

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ \frac{1}{x} & 1 & x \\ \frac{1}{x^2} & \frac{1}{x} & 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Elle n'est pas carrée : non.

Sans calcul, dire si les matrices sont inversibles ($x \in \mathbb{R}^*$).

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ \frac{1}{x} & 1 & x \\ \frac{1}{x^2} & \frac{1}{x} & 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- ▶ Elle n'est pas carrée : non.
- ▶ Son rang est 1 : non.

Sans calcul, dire si les matrices sont inversibles ($x \in \mathbb{R}^*$).

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ \frac{1}{x} & 1 & x \\ \frac{1}{x^2} & \frac{1}{x} & 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- ▶ Elle n'est pas carrée : non.
- ▶ Son rang est 1 : non.
- ▶ Son rang est 1 : non.

Sans calcul, dire si les matrices sont inversibles ($x \in \mathbb{R}^*$).

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ \frac{1}{x} & 1 & x \\ \frac{1}{x^2} & \frac{1}{x} & 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- ▶ Elle n'est pas carrée : non.
- ▶ Son rang est 1 : non.
- ▶ Son rang est 1 : non.
- ▶ Ses colonnes forment une famille libre : oui.