Automatismes en calcul, semaine du 27 novembre

25 novembre 2023

- $f(x) = \cos(x^2)\mathrm{e}^{3x+1}$

- $g(x) = \sin(\ln(1 - x^2))$

- $h(x) = x^{\mathrm{Arcsin}(x)}$

- $f(x) = \cos(x^2)\mathrm{e}^{3x+1}$

  $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \mathrm{e}^{3x+1}(3\cos(x^2) - 2x\sin(x^2))$

- $g(x) = \sin(\ln(1 - x^2))$

- $h(x) = x^{\mathrm{Arcsin}(x)}$

- $f(x) = \cos(x^2)\mathrm{e}^{3x+1}$

  $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \mathrm{e}^{3x+1}(3\cos(x^2) - 2x\sin(x^2))$

- $g(x) = \sin(\ln(1-x^2))$

  $\forall x \in]-1;1[,\ g'(x) = \cos(\ln(1-x^2)) \times \frac{-2x}{1-x^2}$

- $h(x) = x^{\mathrm{Arcsin}(x)}$

classes préparatoires scientifiques Lycée Brizeux

- $f(x) = \cos(x^2)\mathrm{e}^{3x+1}$

  $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \mathrm{e}^{3x+1}(3\cos(x^2) - 2x\sin(x^2))$

- $g(x) = \sin(\ln(1 - x^2))$

  $\forall x \in]-1;1[,\ g'(x) = \cos(\ln(1-x^2)) \times \frac{-2x}{1-x^2}$

- $h(x) = x^{\mathrm{Arcsin}(x)}$

  $\forall x \in]0;1],\ h(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{Arcsin}(x)\ln(x)}$ donc

  $\forall x \in]0;1[,\ h'(x) = h(x) \times \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ln(x) + \frac{\mathrm{Arcsin}(x)}{x}\right)$

- $\ln(x)$

- $f(x) = \sqrt{1+5x}$

- $g(t) = \dfrac{t}{\sqrt[3]{5+2t^2}}$.

- $\ln(x)$

  C'est ultra classique. ln est continue sur $]0;+\infty[$, une de ses primitives est $F(x)=\displaystyle\int_1^x \ln(t)\mathrm{d}t$ et, en intégrant par parties, on a $F(x)=x\ln(x)-x+1$.

- $f(x)=\sqrt{1+5x}$

- $g(t)=\dfrac{t}{\sqrt[3]{5+2t^2}}$.

- $\ln(x)$

  C'est ultra classique. ln est continue sur $]0;+\infty[$, une de ses primitives est $F(x)=\displaystyle\int_1^x \ln(t)\mathrm{d}t$ et, en intégrant par parties, on a $F(x)=x\ln(x)-x+1$.

- $f(x)=\sqrt{1+5x}$

  $\forall x\in[-\dfrac{1}{5};+\infty[,\ f(x)=(1+5x)^{\frac{1}{2}}$

  et donc $F(x)=(1+5x)^{\frac{3}{2}}\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{5}$ est une primitive de f.

- $g(t)=\dfrac{t}{\sqrt[3]{5+2t^2}}$.

- $\ln(x)$

  C'est ultra classique. ln est continue sur $]0;+\infty[$, une de ses primitives est $F(x)=\int_1^x \ln(t)\mathrm{d}t$ et, en intégrant par parties, on a $F(x)=x\ln(x)-x+1$.

- $f(x)=\sqrt{1+5x}$

  $\forall x\in[-\frac{1}{5};+\infty[,\ f(x)=(1+5x)^{\frac{1}{2}}$

  et donc $F(x)=(1+5x)^{\frac{3}{2}}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{5}$ est une primitive de f.

- $g(t)=\dfrac{t}{\sqrt[3]{5+2t^2}}$.

  $\forall t\in\mathbb{R},\ g(t)=(5+2t^2)^{-\frac{1}{3}}\times\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{1}{2}t^2\right)$

  et donc $G(t)=(5+2t^2)^{\frac{2}{3}}\times\frac{3}{2}\times\frac{1}{4}$ est une primitive de g.

classes préparatoires scientifiques Lycée Brizeux

Résoudre $3y' - 2y = x^2$.

Résoudre $3y' - 2y = x^2$.

Les solutions de (E_h) sont les $x \mapsto \lambda \mathrm{e}^{\frac{2}{3}x}$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$.

Résoudre $3y' - 2y = x^2$.

Les solutions de (E_h) sont les $x \mapsto \lambda \mathrm{e}^{\frac{2}{3}x}$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$.

On cherche une solution particulière de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $(a; b; c) \in \mathbb{R}^3$. On a :

$$3f'(x) - 2f(x) = x^2 \Leftrightarrow 3(2ax + b) - 2(ax^2 + bx + c) = x^2$$

ce qui donne le système $\begin{cases} -2a = 1 \\ 6a - 2b = 0 \\ 3b - 2c = 0 \end{cases}$.

Sa solution est $(-\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}; -\frac{9}{4})$ et donc $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{9}{4}$ est une solution particulière.

Résoudre $3y' - 2y = x^2$.

Les solutions de (E_h) sont les $x \mapsto \lambda \mathrm{e}^{\frac{2}{3}x}$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$.

On cherche une solution particulière de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $(a; b; c) \in \mathbb{R}^3$. On a :

$$3f'(x) - 2f(x) = x^2 \Leftrightarrow 3(2ax + b) - 2(ax^2 + bx + c) = x^2$$

ce qui donne le système $\begin{cases} -2a = 1 \\ 6a - 2b = 0 \\ 3b - 2c = 0 \end{cases}$.

Sa solution est $(-\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}; -\frac{9}{4})$ et donc $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{9}{4}$ est une solution particulière.

La solution générale de l'équation est :

$$y(x) = \lambda \mathrm{e}^{\frac{2}{3}x} - \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{9}{4}, \quad (\text{avec } \lambda \in \mathbb{R})$$

classes préparatoires scientifiques Lycée Brizeux

Résoudre $y' - \frac{y}{x} = x^2$ pour $x > 0$.

Résoudre $y' - \frac{y}{x} = x^2$ pour $x > 0$.

Les solutions de l'équation homogène sont les $x \mapsto \lambda x$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$.

Résoudre $y' - \frac{y}{x} = x^2$ pour $x > 0$.

Les solutions de l'équation homogène sont les $x \mapsto \lambda x$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$.

On cherche une solution particulière de la forme $f(x) = \lambda(x)x$ avec $\lambda(x)$ une fonction dérivable. On a :

$$f'(x) - \frac{f(x)}{x} = x^2 \Leftrightarrow \lambda'(x) = x^2 \Leftarrow \lambda(x) = \frac{1}{3}x^3$$

$f(x) = \frac{1}{3}x^4$ est donc une solution particulière.

Résoudre $y' - \frac{y}{x} = x^2$ pour $x > 0$.

Les solutions de l'équation homogène sont les $x \mapsto \lambda x$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$.

On cherche une solution particulière de la forme $f(x) = \lambda(x)x$ avec $\lambda(x)$ une fonction dérivable. On a :

$$f'(x) - \frac{f(x)}{x} = x^2 \Leftrightarrow \lambda'(x) = x^2 \Leftarrow \lambda(x) = \frac{1}{3}x^3$$

$f(x) = \frac{1}{3}x^4$ est donc une solution particulière.

La solution générale de l'équation est :

$$y(x) = \lambda x + \frac{1}{3}x^4, \quad \text{pour } x > 0 \text{ et } \lambda \in \mathbb{R}$$