Automatismes en calcul, semaine du 2 avril

3 avril 2024

Mercredi : sommes

Jeudi : encore des sommes !

Vendredi : racine carrée dans $\mathbb{C}$

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin(kx)$.

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin(kx)$.

$$\sum_{k=0}^{n} \sin(kx) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Im}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}) = \mathrm{Im}(\sum_{k=0}^{n} (\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})^{k}) = \mathrm{Im}\left(\frac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)x}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}\right)$$

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin(kx)$.

$$\sum_{k=0}^{n} \sin(kx) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Im}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}) = \mathrm{Im}\Big(\sum_{k=0}^{n} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\right)^k\Big) = \mathrm{Im}\left(\frac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)x}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}\right)$$

$$= \mathrm{Im}\left(\frac{(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)x})(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})}{(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})}\right)$$

$$= \frac{\sin(nx)+\sin(x)-\sin((n+1)x)}{2-2\cos(x)}$$

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin(kx)$.

$$\sum_{k=0}^{n} \sin(kx) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Im}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}) = \mathrm{Im}(\sum_{k=0}^{n} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\right)^k) = \mathrm{Im}\left(\frac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)x}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}\right)$$

$$= \mathrm{Im}\left(\frac{(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)x})(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})}{(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})}\right)$$

$$= \frac{\sin(nx)+\sin(x)-\sin((n+1)x)}{2-2\cos(x)}$$

Trouvez et corrigez l'erreur !

Rappelez les formules de sommes à connaître par ♡.

classes préparatoires scientifiques
Lycée Brizeux

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} 3^k$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (k+1)(k+2)$.

---

classes préparatoires scientifiques Lycée Brizeux

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} 3^k$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (k+1)(k+2)$.

$$\prod_{k=1}^{n} 3^k = 3^{\sum_{k=1}^{n} k} = 3^{\frac{n(n+1)}{2}}\ .$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} 3^k$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (k+1)(k+2)$.

$$\prod_{k=1}^{n} 3^k = 3^{\sum_{k=1}^{n} k} = 3^{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

$$\sum_{k=1}^{n} (k+1)(k+2) = \sum_{k=1}^{n} k^2 + 3k + 2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k + 2\sum_{k=1}^{n} 1$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 3\frac{n(n+1)}{2} + 2n.$$

Donner la forme algébrique des racines carrées de $7+2\mathrm{i}$.

Donner la forme algébrique des racines carrées de $7+2\mathrm{i}$.

Soit $z=a+\mathrm{i}b$ tel que $z^2=7+2\mathrm{i}$. On a alors :

$$\begin{cases} a^2-b^2=7 \\ a^2+b^2=\sqrt{53} \\ 2ab=2 \end{cases} \iff \begin{cases} a^2=\frac{7+\sqrt{53}}{2} \\ b=\frac{1}{a} \end{cases}$$

Les deux racines de $7+2\mathrm{i}$ sont $\pm\left(a+\dfrac{\mathrm{i}}{a}\right)$ avec $a=\sqrt{\dfrac{7+\sqrt{53}}{2}}$.