

Automatismes en calcul, semaine du 3 mars

6 mars 2026

Mardi : une équation différentielle

Mercredi : développement limité

Vendredi : application des DL

Résoudre $S'' + S' + S = e^x$ avec $S(0) = 1$ et $S'(0) = 0$.

Résoudre $S'' + S' + S = e^x$ avec $S(0) = 1$ et $S'(0) = 0$.

C'est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants.

Résoudre $S'' + S' + S = e^x$ avec $S(0) = 1$ et $S'(0) = 0$.

C'est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants.

Son équation caractéristique est $r^2 + r + 1 = 0$ qui a pour solutions $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\bar{j}$.

Résoudre $S'' + S' + S = e^x$ avec $S(0) = 1$ et $S'(0) = 0$.

C'est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants.

Son équation caractéristique est $r^2 + r + 1 = 0$ qui a pour solutions $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\bar{j}$.

Les solutions de l'équation homogène sont donc de la forme $y_h(x) = e^{-\frac{x}{2}}(\lambda \cos(\frac{\sqrt{3}x}{2}) + \mu \sin(\frac{\sqrt{3}x}{2}))$.

Résoudre $S'' + S' + S = e^x$ avec $S(0) = 1$ et $S'(0) = 0$.

C'est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants.

Son équation caractéristique est $r^2 + r + 1 = 0$ qui a pour solutions $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\bar{j}$.

Les solutions de l'équation homogène sont donc de la forme

$$y_h(x) = e^{-\frac{x}{2}} \left(\lambda \cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) + \mu \sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) \right).$$

$\frac{e^x}{3}$ est solution particulière, les solutions de l'équation $S'' + S' + S = e^x$ sont de la forme :

$$y(x) = e^{-\frac{x}{2}} \left(\lambda \cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) + \mu \sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) \right) + \frac{1}{3}e^x$$

Résoudre $S'' + S' + S = e^x$ avec $S(0) = 1$ et $S'(0) = 0$.

C'est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants.

Son équation caractéristique est $r^2 + r + 1 = 0$ qui a pour solutions $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\bar{j}$.

Les solutions de l'équation homogène sont donc de la forme

$$y_h(x) = e^{-\frac{x}{2}} \left(\lambda \cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) + \mu \sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) \right).$$

$\frac{e^x}{3}$ est solution particulière, les solutions de l'équation $S'' + S' + S = e^x$ sont de la forme :

$$y(x) = e^{-\frac{x}{2}} \left(\lambda \cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) + \mu \sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) \right) + \frac{1}{3}e^x$$

Les CI donnent $\lambda = \frac{2}{3}$ et $\mu = 0$.

Donner le $DL_5(0)$ d'Arccos, la tangente en 0 et les positions relatives.

Donner le $DL_5(0)$ d'Arccos, la tangente en 0 et les positions relatives.

$$\forall x \in]-1; 1[, \operatorname{Arccos}'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} = -(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

Donner le $DL_5(0)$ d'Arccos, la tangente en 0 et les positions relatives.

$$\forall x \in]-1; 1[, \operatorname{Arccos}'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} = -(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned} \text{On a donc : } \operatorname{Arccos}'(x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} -\left(1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + o(x^5)\right) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} -1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{8}x^4 + o(x^5) \end{aligned}$$

Donner le $DL_5(0)$ d'Arccos, la tangente en 0 et les positions relatives.

$$\forall x \in]-1; 1[, \operatorname{Arccos}'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} = -(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned} \text{On a donc : } \operatorname{Arccos}'(x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} -\left(1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + o(x^5)\right) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} -1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{8}x^4 + o(x^5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{On intègre : } \operatorname{Arccos}(x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} \operatorname{Arccos}(0) - x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{40}x^5 + o(x^5) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{\pi}{2} - x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{40}x^5 + o(x^5) \end{aligned}$$

Donner le $DL_5(0)$ d'Arccos, la tangente en 0 et les positions relatives.

$$\forall x \in]-1; 1[, \operatorname{Arccos}'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} = -(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned} \text{On a donc : } \operatorname{Arccos}'(x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} -\left(1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + o(x^5)\right) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} -1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{8}x^4 + o(x^5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{On intègre : } \operatorname{Arccos}(x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} \operatorname{Arccos}(0) - x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{40}x^5 + o(x^5) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{\pi}{2} - x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{40}x^5 + o(x^5) \end{aligned}$$

$y = \frac{\pi}{2} - x$ est donc tangente à $y = \operatorname{Arccos}(x)$ en 0.

Au voisinage de 0, $\operatorname{Arccos}(x) - (\frac{\pi}{2} - x)$ est du signe de $-\frac{1}{6}x^3$.

La tangente est donc au-dessus pour $x > 0$,
au dessous pour $x < 0$.

Déterminer l'asymptote en $+\infty$ de $y = \frac{x+1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$

Déterminer l'asymptote en $+\infty$ de $y = \frac{x+1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$

On pose $x = \frac{1}{h}$ et on a : $\frac{x+1}{1+e^{\frac{1}{x}}} = \frac{\frac{1}{h}+1}{1+e^h} = \left(\frac{1}{h}+1\right) \times \frac{1}{1+e^h}$

Déterminer l'asymptote en $+\infty$ de $y = \frac{x+1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$

On pose $x = \frac{1}{h}$ et on a : $\frac{x+1}{1+e^{\frac{1}{x}}} = \frac{\frac{1}{h}+1}{1+e^h} = \left(\frac{1}{h}+1\right) \times \frac{1}{1+e^h}$

On calcule les DL :

$$1+e^h \underset{h \rightarrow 0}{=} 1+1+h+o(h) \underset{h \rightarrow 0}{=} 2+h+o(h) \text{ donc :}$$

$$\frac{1}{1+e^h} \underset{h \rightarrow 0}{=} \frac{1}{2} \times \frac{1}{1+\frac{h}{2}+o(h)} \underset{h \rightarrow 0}{=} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{h}{2} + o(h)\right) \underset{h \rightarrow 0}{=} \frac{1}{2} - \frac{h}{4} + o(h)$$

$$\left(\frac{1}{h}+1\right) \times \frac{1}{1+e^h} \underset{h \rightarrow 0}{=} \left(\frac{1}{h}+1\right) \times \left(\frac{1}{2} - \frac{h}{4} + o(h)\right) \underset{h \rightarrow 0}{=} \frac{1}{2h} + \frac{1}{4} + o(1)$$

Soit $\frac{x+1}{1+e^{\frac{1}{x}}} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \frac{x}{2} + \frac{1}{4} + o(1)$. L'asymptote est $y = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}$.

Déterminer l'asymptote en $+\infty$ de $y = \frac{x+1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$

On pose $x = \frac{1}{h}$ et on a : $\frac{x+1}{1+e^{\frac{1}{x}}} = \frac{\frac{1}{h}+1}{1+e^h} = \left(\frac{1}{h}+1\right) \times \frac{1}{1+e^h}$

On calcule les DL :

$1+e^h \underset{h \rightarrow 0}{=} 1+1+h+o(h) \underset{h \rightarrow 0}{=} 2+h+o(h)$ donc :

$\frac{1}{1+e^h} \underset{h \rightarrow 0}{=} \frac{1}{2} \times \frac{1}{1+\frac{h}{2}+o(h)} \underset{h \rightarrow 0}{=} \frac{1}{2}(1-\frac{h}{2}+o(h)) \underset{h \rightarrow 0}{=} \frac{1}{2}-\frac{h}{4}+o(h)$

$\left(\frac{1}{h}+1\right) \times \frac{1}{1+e^h} \underset{h \rightarrow 0}{=} \left(\frac{1}{h}+1\right) \times \left(\frac{1}{2}-\frac{h}{4}+o(h)\right) \underset{h \rightarrow 0}{=} \frac{1}{2h} + \frac{1}{4} + o(1)$

Soit $\frac{x+1}{1+e^{\frac{1}{x}}} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \frac{x}{2} + \frac{1}{4} + o(1)$. L'asymptote est $y = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}$.

Comment avoir les positions relatives des deux courbes ?

A l'écoute cette semaine : The Pixies

- ▶ Where is my mind ?
- ▶ Cactus + Gouge away
- ▶ Motorway to Roswell

