Automatismes en calcul, semaine du 4 décembre

5 décembre 2023

- $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{4n^2+n} - 2n$

- $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$

- $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{4n^2+n}-2n$

  $\forall n>0,\ \sqrt{4n^2+n}-2n = \frac{n}{\sqrt{4n^2+n}+2n} = \frac{1}{\sqrt{4+\frac{1}{n}}+2} \to \frac{1}{4}$

- $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

- $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{4n^2+n}-2n$

  $\forall n>0,\ \sqrt{4n^2+n}-2n = \frac{n}{\sqrt{4n^2+n}+2n} = \frac{1}{\sqrt{4+\frac{1}{n}}+2} \to \frac{1}{4}$

- $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$

  $\forall n>0,\ \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{n\ln(1+\frac{1}{n})}.$

  Or, $\frac{\ln(1+x)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$ donc, avec $x=\frac{1}{n}$ on a $\frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ et

$$\mathrm{e}^{n\ln(1+\frac{1}{n})} = \mathrm{e}^{n\frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}}\times\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{e}^1$$

classes préparatoires scientifiques Lycée Brizeux

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k+1)(k+2).$

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \times k!$ (en faisant apparaître un téléscopage)

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k+1)(k+2)$.

$$\forall n > 0,\ \sum_{k=1}^{n}(k+1)(k+2) = \sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k + 2\sum_{k=1}^{n} 1$$

$$= \boxed{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 3\frac{n(n+1)}{2} + 2n}.$$

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \times k!$ (en faisant apparaître un téléscopage)

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k+1)(k+2)$.

$$\forall n > 0,\ \sum_{k=1}^{n}(k+1)(k+2) = \sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k + 2\sum_{k=1}^{n} 1$$

$$= \boxed{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 3\frac{n(n+1)}{2} + 2n}.$$

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \times k!$ (en faisant apparaître un téléscopage)

$$\sum_{k=1}^{n} k \times k! = \sum_{k=1}^{n}((k+1)-1) \times k! = \sum_{k=1}^{n}(k+1)! - \sum_{k=1}^{n} k!$$

$$= \sum_{k=2}^{n+1} k! - \sum_{k=1}^{n} k! = \boxed{(n+1)! - 1}$$

- $x^5 - y^5$

- $\cos(3x) + \cos(5x)$

- $x^5 - y^5$

  C'est une formule du cours :

  $$x^5 - y^5 = (x - y)(x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4).$$

- $\cos(3x) + \cos(5x)$

- $x^5 - y^5$

  C'est une formule du cours :

  $$x^5 - y^5 = (x - y)(x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4).$$

- $\cos(3x) + \cos(5x)$

  On utilise l'angle moitié :

- $x^5 - y^5$

  C'est une formule du cours :

  $$x^5 - y^5 = (x-y)(x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4).$$

- $\cos(3x) + \cos(5x)$

  On utilise l'angle moitié :

  $$\begin{aligned}\cos(3x) + \cos(5x) &= \mathrm{Re}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}3x} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}5x}) \\ &= \mathrm{Re}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}4x} 2\cos(x)) \\ &= 2\cos(x)\cos(4x).\end{aligned}$$

Faire l'étude complète de $f(x) = 3^{\cos(x)}$.

Faire l'étude complète de $f(x) = 3^{\cos(x)}$.

$f(x) = 3^{\cos(x)} = \mathrm{e}^{\cos(x)\ln(3)}$ donc f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
De plus, f est paire et 2π périodique : il suffit de l'étudier sur $[0;\pi]$.

Faire l'étude complète de $f(x) = 3^{\cos(x)}$.

$f(x) = 3^{\cos(x)} = \mathrm{e}^{\cos(x)\ln(3)}$ donc f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
De plus, f est paire et 2π périodique : il suffit de l'étudier sur $[0;\pi]$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = -\sin(x)\ln(3)\mathrm{e}^{\cos(x)\ln(3)}$.
qui est du signe de $-\sin(x)$; f est donc décroissante sur $[0;\pi]$.

Faire l'étude complète de $f(x) = 3^{\cos(x)}$.

$f(x) = 3^{\cos(x)} = \mathrm{e}^{\cos(x)\ln(3)}$ donc f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
De plus, f est paire et 2π périodique : il suffit de l'étudier sur $[0;\pi]$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = -\sin(x)\ln(3)\mathrm{e}^{\cos(x)\ln(3)}$.
qui est du signe de $-\sin(x)$; f est donc décroissante sur $[0;\pi]$.

On a : $f(0) = 3$, $f(\pi) = \frac{1}{3}$