Automatismes en calcul, semaine du 6 octobre

10 octobre 2025

Calculer $S_1 = \sum_{k=5}^{102} 3 + 5k$ et $S_2 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} i + j$

Calculer $S_1 = \sum_{k=5}^{102} 3 + 5k$ et $S_2 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} i + j$

- $$S_1 = 3\sum_{k=5}^{102} 1 + 5\sum_{k=5}^{102} k = 3 \times 98 + 5 \times \frac{98 \times 107}{2}$$
  $$= 294 + 5 \times 49 \times 107 = 26509.$$

Calculer $S_1 = \sum_{k=5}^{102} 3 + 5k$ et $S_2 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} i + j$

- $S_1 = 3\sum_{k=5}^{102} 1 + 5\sum_{k=5}^{102} k = 3 \times 98 + 5 \times \dfrac{98 \times 107}{2}$

  $= 294 + 5 \times 49 \times 107 = 26509.$

- $S_2 = \sum_{j=2}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j-1} i + j\right) = \sum_{j=n}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j-1} i \quad + j \times (j-1)\right)$

  $= \sum_{j=1}^{n}\left(\dfrac{j(j-1)}{2} + j(j-1)\right) = \dfrac{3}{2}\sum_{j=1}^{n} j^2 - j$

  $= \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \dfrac{n(n+1)}{2}\right) = \dfrac{n(n+1)(n-1)}{2}$

Résoudre $2x^3 \leq x + 14 \quad \text{et} \quad x^5 > 2 - x$

Résoudre $2x^3 \leq x + 14 \quad \text{et} \quad x^5 > 2 - x$

$2x^3 \leq x + 14 \iff 2x^3 - x - 14 \leq 0$
$2x^3 - x - 14 = (x-2)(2x^2 + 4x + 7)$ et
$2x^2 + 4x + 7 = 2(x+1)^2 + 5 > 0$ donc $2x^3 - x - 14$ est du signe de $x - 2$.
Finalement, l'ensemble des solutions est $]-\infty; 2]$.

Résoudre $2x^3 \leq x + 14 \quad \text{et} \quad x^5 > 2 - x$

$2x^3 \leq x + 14 \iff 2x^3 - x - 14 \leq 0$
$2x^3 - x - 14 = (x - 2)(2x^2 + 4x + 7)$ et
$2x^2 + 4x + 7 = 2(x + 1)^2 + 5 > 0$ donc $2x^3 - x - 14$ est du signe de $x - 2$.
Finalement, l'ensemble des solutions est $]-\infty; 2]$.

On pourrait comparer à 0 puis factoriser par $x - 1$ mais voici une autre stratégie.

Résoudre $2x^3 \leq x + 14$ et $x^5 > 2 - x$

$2x^3 \leq x + 14 \iff 2x^3 - x - 14 \leq 0$
$2x^3 - x - 14 = (x-2)(2x^2 + 4x + 7)$ et
$2x^2 + 4x + 7 = 2(x+1)^2 + 5 > 0$ donc $2x^3 - x - 14$ est du signe de $x - 2$.
Finalement, l'ensemble des solutions est $]-\infty; 2]$.

$x^5 > 2 - x \iff x^5 + x > 2$.
$f : x \mapsto x^5 + x$ est strictement croissante et continue, elle réalise une bijection $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
On a $f(1) = 2$ donc l'ensemble des solutions est $]1; +\infty[$.

Déterminer une racine carrée complexe de $6-6i$.

Déterminer une racine carrée complexe de $6-6i$.

- $6-6i = 6\sqrt{2}\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{4}}$; une de ses racines carrées est $\sqrt{6\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{8}}$.

Déterminer une racine carrée complexe de $6-6i$.

- $6-6i = 6\sqrt{2}\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{4}}$; une de ses racines carrées est $\sqrt{6\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{8}}$.
- Soit $z = a+ib$. $z^2 = 6-6i \iff \begin{cases} a^2-b^2=6 \\ 2ab=-6 \end{cases}$

  $z^2 = 6-6i \implies a^2+b^2 = 6\sqrt{2}$ donc le système peut s'écrire :

$$\begin{cases} a^2-b^2=6 \\ a^2+b^2=6\sqrt{2} \\ 2ab=-6 \end{cases}$$

On déduit $a = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(6+6\sqrt{2})} = \pm\sqrt{3(1+\sqrt{2})}$ et $b = \frac{-3}{a}$

classes préparatoires scientifiques Lycée Brizeux

Déterminer une racine carrée complexe de $6-6i$.

- $6-6i=6\sqrt{2}\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{4}}$; une de ses racines carrées est $\sqrt{6\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{8}}$.
- Soit $z=a+ib$. $z^2=6-6i \iff \begin{cases} a^2-b^2=6 \\ 2ab=-6 \end{cases}$

  $z^2=6-6i \implies a^2+b^2=6\sqrt{2}$ donc le système peut s'écrire :

$$\begin{cases} a^2-b^2=6 \\ a^2+b^2=6\sqrt{2} \\ 2ab=-6 \end{cases}$$

  On déduit $a=\pm\sqrt{\frac{1}{2}(6+6\sqrt{2})}=\pm\sqrt{3(1+\sqrt{2})}$ et $b=\frac{-3}{a}$
- En déduire $\cos(\frac{\pi}{8})$.

classes préparatoires scientifiques Lycée Brizeux

Résoudre $\cos(x) = 0,1 \quad \text{et} \quad x^{\pi} = \ln(2)$

Résoudre $\cos(x) = 0,1 \quad \text{et} \quad x^\pi = \ln(2)$

- $\cos(x) = 0,1$

  $\iff x \in \{\mathrm{Arccos}(0,1) + 2k\pi ; -\mathrm{Arccos}(0,1) + 2k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z}\}$

Résoudre $\cos(x) = 0,1$ et $x^\pi = \ln(2)$

- $\cos(x) = 0,1$

$$\iff x \in \{\mathrm{Arccos}(0,1) + 2k\pi ; -\mathrm{Arccos}(0,1) + 2k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z}\}$$

- $x^\pi = \ln(2) \iff \mathrm{e}^{\pi \ln(x)} = \ln(2) \iff \ln(x) = \dfrac{\ln(\ln(2))}{\pi}$

$$\iff \boxed{x = \exp\left(\frac{\ln(\ln(2))}{\pi}\right)}$$

A l'écoute cette semaine : Etienne Daho.

- Le premier jour (du reste de ta vie)
- Epaule tatoo
- Duel au soleil
- Weekend à Rome