Automatismes en calcul, semaine du 8 avril

7 avril 2024

classes préparatoires scientifiques
Lycée Brizeux

Lundi : développements limités

Mercredi : équation différentielle

Jeudi et vendredi : concours blanc

Déterminer les positions relatives de $y = (2 + \ln(1 + x))^2$ et de sa tangente en 0.

Déterminer les positions relatives de $y = (2 + \ln(1 + x))^2$ et de sa tangente en 0.

Pour obtenir ce genre de résultat, on a besoin d'un DL en 0 avec le premier terme d'ordre > 1 non nul.

Déterminer les positions relatives de $y = (2 + \ln(1 + x))^2$ et de sa tangente en 0.

Pour obtenir ce genre de résultat, on a besoin d'un DL en 0 avec le premier terme d'ordre > 1 non nul.

$2 + \ln(1 + x) \underset{x \to 0}{=} 2 + x - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$ donc

$(2 + \ln(1 + x))^2 \underset{x \to 0}{=} 4 + 4x - x^2 + o(x^2)$.

Déterminer les positions relatives de $y = (2 + \ln(1 + x))^2$ et de sa tangente en 0.

Pour obtenir ce genre de résultat, on a besoin d'un DL en 0 avec le premier terme d'ordre > 1 non nul.

$2 + \ln(1 + x) \underset{x \to 0}{=} 2 + x - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$ donc

$(2 + \ln(1 + x))^2 \underset{x \to 0}{=} 4 + 4x - x^2 + o(x^2)$.

La tangente à $y = (2 + \ln(x))^2$ en 0 est donc $y = 4 + 4x$.

$(2 + \ln(x))^2 - (4 + 4x) \underset{x \to 0}{=} -x^2 + o(x^2) < 0$ pour $x \to 0$.

La courbe est sous sa tangente au voisinage de 0.

Résoudre $y'' + 4y' + 4y = 0$ avec les conditions $y(1) = 1$ et $y'(1) = -3$.

Résoudre $y'' + 4y' + 4y = 0$ avec les conditions $y(1) = 1$ et $y'(1) = -3$.

Il s'agit d'une équa diff d'ordre 2, linéaire à coeff constants et homogène. On applique la méthode du cours.

Résoudre $y'' + 4y' + 4y = 0$ avec les conditions $y(1) = 1$ et $y'(1) = -3$.

Il s'agit d'une équa diff d'ordre 2, linéaire à coeff constants et homogène. On applique la méthode du cours.

L'équation caractéristique $r^2 + 4r + 4 = 0$ a une racine double $r = -2$.
On déduit que y est de la forme $x \mapsto \lambda e^{-2x} + \mu x e^{-2x}$.

Les conditions donnent $\lambda + \mu = e^2$ et $-2\lambda - \mu = -3e^2$.
Après calculs, la fonction cherchée est $x \mapsto 2e^2 e^{-2x} - e^2 x e^{-2x}$.

Résoudre $y'' + 4y' + 4y = 0$ avec les conditions $y(1) = 1$ et $y'(1) = -3$.

Il s'agit d'une équa diff d'ordre 2, linéaire à coeff constants et homogène. On applique la méthode du cours.

L'équation caractéristique $r^2 + 4r + 4 = 0$ a une racine double $r = -2$.
On déduit que y est de la forme $x \mapsto \lambda \mathrm{e}^{-2x} + \mu x \mathrm{e}^{-2x}$.

Les conditions donnent $\lambda + \mu = \mathrm{e}^2$ et $-2\lambda - \mu = -3\mathrm{e}^2$.
Après calculs, la fonction cherchée est $x \mapsto 2\mathrm{e}^2 \mathrm{e}^{-2x} - \mathrm{e}^2 x \mathrm{e}^{-2x}$.

test