

Automatismes en calcul, semaine du 8 décembre

7 décembre 2025

- ▶ Pour $x \in \mathbb{R}$, linéariser $\sin^3(x)$. En déduire $\int_0^\pi \sin^3(x)dx$.

- ▶ Calculer $\int_{-\pi}^\pi \cos^5(x) \sin^7(x)dx$

- Pour $x \in \mathbb{R}$, linéariser $\sin^3(x)$. En déduire $\int_0^\pi \sin^3(x)dx$. Pour tout réel x ,

$$\begin{aligned}\sin^3(x) &= \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^3 = \frac{1}{-8i} (e^{3ix} - e^{-3ix} + 3e^{ix} - 3e^{-ix}) \\ &= -\frac{1}{4} \sin(3x) + \frac{3}{4} \sin(x).\end{aligned}$$

- Calculer $\int_{-\pi}^\pi \cos^5(x) \sin^7(x)dx$

- Pour $x \in \mathbb{R}$, linéariser $\sin^3(x)$. En déduire $\int_0^\pi \sin^3(x)dx$. Pour tout réel x ,

$$\sin^3(x) = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^3 = \frac{1}{-8i} (e^{3ix} - e^{-3ix} + 3e^{ix} - 3e^{-ix})$$

$$= -\frac{1}{4} \sin(3x) + \frac{3}{4} \sin(x). \text{ Il suit :}$$

$$\int_0^\pi \sin^3(x)dx = \left[\frac{1}{12} \cos(3x) - \frac{3}{4} \cos(x) \right]_0^\pi = \frac{4}{3}$$

- Calculer $\int_{-\pi}^\pi \cos^5(x) \sin^7(x)dx$

- Pour $x \in \mathbb{R}$, linéariser $\sin^3(x)$. En déduire $\int_0^\pi \sin^3(x)dx$. Pour tout réel x ,

$$\sin^3(x) = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^3 = \frac{1}{-8i} (e^{3ix} - e^{-3ix} + 3e^{ix} - 3e^{-ix})$$

$$= -\frac{1}{4} \sin(3x) + \frac{3}{4} \sin(x). \text{ Il suit :}$$

$$\int_0^\pi \sin^3(x)dx = \left[\frac{1}{12} \cos(3x) - \frac{3}{4} \cos(x) \right]_0^\pi = \frac{4}{3}$$

- Calculer $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^5(x) \sin^7(x)dx$

L'intégrande est impaire et on intègre sur un intervalle centré sur 0, on en déduit que l'intégrale est nulle.

► $A = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

► $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & -5 \end{pmatrix}$

► $A = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

$\det(A) = 41 \neq 0$ donc A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{41} \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$

► $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & -5 \end{pmatrix}$

► $A = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

$\det(A) = 41 \neq 0$ donc A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{41} \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$

► $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & -5 \end{pmatrix}$

On a $L_3 = L_2 - 2L_1$ donc en faisant $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$ puis

$L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1$ on a $B \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et donc B n'est pas

inversible.

Inverser $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$\text{Inverser } A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

On opère l'algorithme de Gauss sur $AX = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$.

$$\text{Inverser } A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

On opère l'algorithme de Gauss sur $AX = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$. Et on aboutit à :

$$X = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} -4b_1 - b_2 + 7b_3 \\ 8b_1 - b_2 - 5b_3 \\ -4b_1 + 5b_2 + b_3 \end{pmatrix}$$

On en déduit que A est inversible et que

$$A^{-1} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} -4 & -1 & 7 \\ 8 & -1 & -5 \\ -4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

A l'écoute cette semaine : Black Sabbath.

- ▶ Changes
- ▶ Planet Caravan
- ▶ Heaven and Hell
- ▶ War Pigs